# 期末试题

试卷共 2 页, 共 13 题, 满分 30 分.

**判断/选择题: 无需写出证明.**

1. (1 分) 存在一对编码 $E:\{0,1\}^7 \to \{0,1\}^{10}$ 和解码 $D:\{0,1\}^{10} \to \{0,1\}^7$, 使得对于任何消息 $x \in \{0,1\}^7$, 即使更改 $c = E(x)$ 中的任意一位, 也能被正确解码.

2. (1 分) 可以用三种颜色给 $K_4$ 边染色, 使得任意两个公用顶点的边都不同色.

3. (1 分) $X, Y$ 是实随机变量. 如果 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) < \infty$, 那么 $\exists c, \Pr[X - Y = c] = 1$.

4. (1 分) 有两沓抽奖券, 每沓 8 张. 已知其中一沓有 4 张中奖, 另一沓有 2 张中奖. 允许选择两张抽奖券刮奖. 随机选取第一张抽奖券. 如果第一张抽奖券中奖, 第二张刮奖券应该如何选择.

**填空题: 无需写出证明.**

5. (2 分) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} i^3 =$ ______.

6. (2 分) 考虑在一个三维立方体, $v$ 是其中一个顶点. 考虑在三维立方体顶点上的随机游走. 以 $v$ 为起点, 每次随机移动到一个相邻顶点. 那么首次返回时间的期望是 ______.

   具体来说, 不妨用 $\{0,1\}^3$ 表示状态空间, $X_0 = v = (0,0,0)$. 求 $\mathbb{E}[\min\{t : t > 0 \wedge X_t = v\}]$.

7. (2 分) 有一组事件 $E_1, \ldots, E_n$. 已知对任意 $S \subsetneq [n]$, 有 $\Pr[\bigwedge_{i \in S} E_i] = (1/2)^{|S|}$. 求 $\Pr[\bigwedge_{i \in [n]} E_i]$ 可能的取值范围.

**解答题: 请选择 4 道作答.**

8. (5 分) 设 $G$ 是点集 $V = [n]$ 上的一个简单无向图. 图中的点形成了 $k$ 个联通子块 $S_1, \ldots, S_k \subseteq V$. 向 $G$ 添加 $k-1$ 条边, 使得图联通. 问有多少种不同的添加边的方法.

   提示: 如果每个联通子块都是单点集, 那么题目就是在问有标号的 $k$ 个点组成的树的个数.

9. (5 分) 用 $\mathsf{M}_n(\mathbb{F})$ 表示所有 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 矩阵. 用 $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F})$ 表示所有 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 可逆矩阵. 我们称两个矩阵 $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{F})$ 相似当且仅当 $\exists G \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{F})$, $GAG^{-1} = B$. 相似是一个等价关系. 求在相似关系下, $\mathsf{M}_2(\mathbb{F}_q)$ 有多少个等价类. 证明你的结果.

   提示: 可以使用 Burnside 引理.

10. (5 分) 设 $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ 是 $2n$ 个独立的随机变量. $X_i \sim \mathrm{Bern}(4/5)$, $Y_i \sim \mathrm{Bern}(1/2)$.

    求最小的不依赖于 $n$ 的常数 $c$ 使得 $\Pr[\sum_{i=1}^n X_i \le \sum_{i=1}^n Y_i] \le O(c^n)$.

11. (5 分) 对于函数 $f:\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$, 它的傅里叶系数 $\hat{f}:\{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2^n}\sum_x f(x)\chi_y(x), \qquad f(x) = \sum_y \hat{f}(y)\chi_y(x).$$

考虑一个"噪音算子" $T_\rho : (\{0,1\}^n \to \mathbb{R}) \to (\{0,1\}^n \to \mathbb{R})$, 其中 $\rho \in [0,1]$.

$$T_\rho(f)(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{y\sim(\mathrm{Bern}(\rho))^n}\Big[f(x\oplus y)\Big].$$

求 $\widehat{T_\rho(f)}(y)$. 化简后的表达式不应该出现 $\sum$ 或 $\mathbb{E}$.

12. (5 分) 对一个马尔可夫链 $P$, 用 $\pi$ 表示它的一个稳态分布, 用 $\tau(\varepsilon)$ 表示它的混合时间.

$$\tau(\varepsilon) = \text{smallest } t \text{ s.t. } d(t) \le \varepsilon$$
$$d(t) = \max_x \Delta_{\mathrm{TV}}(P^t(x,\cdot),\pi)$$

证明, 对任意 $\varepsilon > 0$, $\tau(2\varepsilon^2) \le 2\tau(\varepsilon)$.

13. (5 分) 假设 $n$ 足够大. 证明存在不依赖 $n$ 的常数 $\alpha > 0$, 使得

> 采样有 $\alpha n$ 条边的随机图 $G \sim G(n, \alpha n)$, 并采样两个不同的随机点 $u, v$. 那么 $u, v$ 在 $G$ 上联通的概率不超过 $1/n$.