期中考试

试卷共 3 页, 共 16 题, 满分 30 分.

判断题, 填空题: 无需写出证明.

1. (1 分) 在命题逻辑中, 对于任意命题, $\vdash \varphi$ 和 $\vdash \neg\varphi$ 有且只有一个成立.
2. (1 分) 可以在去掉 RAA 的自然演绎系统中推出 $(((P \to Q) \to P) \to P)$.
3. (1 分) 令 $S_0 = \varnothing$, $S_{i+1} = 2^{S_i}$. 那么 $S_0 \cup S_1 \cup \dots$ 是否是一个 ZFC 中的集合.
4. (1 分) a, b, c 是正整数, 那么 $\gcd(a, b, c) = \gcd(\gcd(a, b), c)$.
5. (1 分) $\mathrm{Sym}(4)$ 有 9 阶子群.
6. (1 分) $\mathbb{Z}[x]$ 是一个主理想整环 (PID).
7. (1 分) 有限阶循环群的子群一定是循环群.
8. (1 分) 如果 R 是一个整环 (含幺交换无零因子), 那么 $R[x]$ 是一个整环.
9. (1 分) 最小的非交换群是几阶群.
10. (1 分) $\mathbb{F}_2[x]$ 中有几个 (首一的) 10 次不可约多项式.

解答题: 请选择 4 道作答.

11. (5 分) 令 Γ 表示如下公理集合, 不难看出它们是在 Peano 公理中不涉及乘法的公理.

$$
\begin{aligned}
&\forall x \neg(0 = S(x)) \\
&\forall xy(S(x) = S(y) \to x = y) \\
&\forall x(x + 0 = x) \\
&\forall xy(x + S(y) = S(x + y)) \\
&(\varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x)))) \to \forall x \varphi(x) \qquad \text{对任意 } \varphi
\end{aligned}
$$

为了简化证明, 我们使用几个稍作修改的相等规则, 不再局限于变量符号. 它们都很容易从原有的相等公理使用一次 $\forall E$ 规则得出.

$$
\frac{}{t = t}\,\mathrm{RI}_1^* \quad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\,\mathrm{RI}_2^* \quad \frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\,\mathrm{RI}_3^* \quad \frac{t_1 = t_2}{t(t_1) = t(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^* \quad \frac{t_1 = t_2}{\varphi(t_1) \to \varphi(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^*
$$

在作业中, 已经作为例子给出 $\Gamma \vdash \forall x(0 + x = x)$ 和 $\Gamma \vdash \forall xy(S(x) + y = S(x + y))$ 的证明. 请使用自然演绎法, 证明 $\Gamma \vdash \forall xyz((x + y) + z = x + (y + z))$. 可以直接使用例子中已经证明的命题.

12. (5 分) 在 ZFC 中, 证明或证伪以下命题: 如果 $\in$ 是集合 S 上的 (全) 序关系, 也就是定义 $x < y$ 当且仅当 $x \in y$. 那么也是 S 上的良序关系.

13. (5 分) 用 PA 表示 Peano 公理, 其最自然的模型就是自然数. 在课上, 我们说明了 PA 存在非标准模型, 其步骤如下.

    1. 添加常数符号 $\{c_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. 这里 $\mathcal{I}$ 是一个不可数集合.
    2. 对任意不同的 $i, j \in \mathcal{I}$, 添加公理 $c_i \neq c_j$.
    3. 添加的符号和公理后仍然一致, 即 $\mathrm{PA}, \{c_i \neq c_j\}_{i\neq j\in\mathcal{I}} \nvdash \perp$.
    4. 由一阶逻辑的完备性, 存在一个模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $\mathfrak{B} \vDash \mathrm{PA}, \{c_i \neq c_j\}_{i\neq j}$. 新加入的公理 $\{c_i \neq c_j\}_{i\neq j}$ 保证了 $\mathfrak{B}$ 一定远大于自然数模型.
    5. $\mathfrak{B} \vDash \mathrm{PA}$, 即 $\mathfrak{B}$ 也是 Peano 代数的一个（非标准）模型.

    请论证其中的第三步, 为何新公理不会破坏一致性?

14. (5 分) 设 R 为整环 (含幺交换无零因子), 则 R 中可逆元构成的乘法群的任意有限子群 G 是循环群.

    提示: 考虑分式域.

15. (5 分) 素数 p, q 满足 $p > q > 2$ 且 $q \mid p - 1$.

    (1) 证明, 存在阶为 pq 的非循环群.

    (2) (额外 2 分) 证明, 在同构意义下, 阶为 pq 的非循环群只有一个.

    提示: 需要使用 Sylow 第三定理: 若 $|G| = p^k m$（p 为素数, $\gcd(p, m) = 1$）, 记 Sylow p-子群的数目为 n_p, 那么 $n_p \mid m$ 且 $n_p \equiv 1 \pmod p$.

    提示: 对任意有限域 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^*$ 是循环群.

16. (5 分) 令 $K_1 = \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+1)$ 和 $K_2 = \mathbb{F}_{11}[y]/(y^2+2y+2)$.

    (1) 证明 K_1, K_2 均是大小为 121 的域.

    (2) K_1 中元素可以记为 $ax+b$ 的形式, K_2 中元素可以记为 $ay+b$ 的形式, 其中 $a, b \in \mathbb{F}_{11}$. 在这种表示下, 给出一个 K_1 到 K_2 的域同构.

附录: 自然演绎系统推导规则　考虑只包含连接词 $\to$ 和 $\wedge$ 的命题逻辑. 包括永假常元 $\perp$, $\neg\phi$ 是 $\phi \to \perp$ 的缩写. 没有公理. 推导规则如下:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2 \qquad \frac{\perp}{\phi} \perp$$

$$\begin{array}{c}[\phi]\\ \mathcal{D}\\ \dfrac{\psi}{\phi \to \psi} \to I\end{array} \qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \mathcal{D}\\ \dfrac{\perp}{\phi}\mathrm{RAA}\end{array}$$

其中, 横线上面是前提, 下面是推导的结果 (结论), 横线右边是规则的名字 (例如 $\wedge I$). $\mathcal{D}$ 表示省略的推导步骤; 方括号表示假设该公式已经推出, 在此基础上进行推理.

扩展为一阶逻辑后, 引入变量符号、常量符号. 引入量词符号 $\forall$ 及推导规则

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \dfrac{\phi(x)}{\forall x \phi(x)}\forall I\end{array} \qquad \frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}\forall E$$

$\exists x$ 是 $\neg\forall x\neg$ 的缩写. 引入关系符号 $=$ 及对应推导规则或公理.