朴素集合论与命题逻辑

参考答案

1. (10 分) 使用自然演绎 (Natural deduction) [1]推出 $(((p \to q) \to p) \to p)$. 需要写明每步使用的推导规则.

解

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \to \bot]_2 \qquad [p]_3}{\bot}\,(\to E)}{q}\,(\bot)}{p \to q}\,(\to I_3) \qquad [(p \to q) \to p]_1}{p}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E, \text{结合}[p \to \bot]_2)}{p}\,(\mathrm{RAA}_2)}{((p \to q) \to p) \to p}\,\to I_1}{}
$$

2. (10 分) (1) 用自然演绎推导下面两个命题时, 哪个需要使用 RAA 规则, 哪个不需要使用 RAA 规则?
   - $((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$
   - $((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$

   (2) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统, 去掉 RAA 规则, 但是增加一个公理模式: 对于任何命题 ϕ, 可以把 $(\neg\neg\phi \to \phi)$ 直接作为公理使用. 证明: $(((p \to q) \to p) \to p)$ 可以被推出.

   (3) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统, 去掉 RAA 规则, 但是增加一个公理模式: 对于任何命题 ϕ, ψ, 可以把 $(((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi)$ 直接作为公理使用. 证明: 对于任何命题 ϕ, $(\neg\neg\phi \to \phi)$ 可以被推出.

解

(1) 第一个不需要 RAA 规则, 第二个需要, 推导如下:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p \to q]_1 \qquad [p]_2}{q}\,(\to E) \qquad [q \to \bot]_3}{\bot}\,(\to E)}{p \to \bot}\,(\to I_2)}{(q \to \bot) \to (p \to \bot)}\,(\to I_3)}{(p \to q) \to ((q \to \bot) \to (p \to \bot))}\,(\to I_1)
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(q \to \bot) \to (p \to \bot)]_1 \qquad [q \to \bot]_2}{p \to \bot}\,(\to E) \qquad [p]_3}{\bot}\,(\to E)}{q}\,(\mathrm{RAA}_2)}{p \to q}\,(\to I_3)}{(q \to \bot) \to (p \to \bot) \to (p \to q)}\,(\to I_1)
$$

[1]使用没有 $\neg$ 和 $\vee$ 的简化版. 参见 Logic and Structure 第 2.4 节.

(2) 我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\to q)\to p]_1 \qquad \dfrac{[p\to\bot]_2}{p\to q}}{p}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E, \text{结合}[p\to\bot]_2)}{(p\to\bot)\to\bot}\,(\to I_2) \qquad ((p\to\bot)\to\bot)\to p\ (\text{公理})}{p}\,(\to E)}{((p\to q)\to p)\to p}\,(\to I_1)$$

(3) 我们有

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(p\to\bot)\to\bot]_1 \qquad [p\to\bot]_2}{\bot}\,(\to E)}{p}\,(\bot)}{(p\to\bot)\to p}\,(\to I_2) \qquad ((p\to\bot)\to p)\to p\ (\text{公理})}{p}\,(\to E)}{((p\to\bot)\to\bot)\to p}\,(\to I_1)$$

3. (5 分) 用 System K[2] 证明 $((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))$, 也就是要推出 $\Rightarrow((p\to q)\to(\neg q\to\neg p))$.

解

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg q, p\Rightarrow p}{\neg q\Rightarrow\neg p, p}\,(\Rightarrow\neg) \qquad \dfrac{q\Rightarrow\neg p, q}{q,\neg q\Rightarrow\neg p}\,(\neg\Rightarrow)}{(p\to q),\neg q\Rightarrow\neg p}\,(\to\Rightarrow)}{(p\to q)\Rightarrow(\neg q\to\neg p)}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)}\,(\Rightarrow\to)$$

4. (5 分) 考虑两个定义了良序关系的集合 $(S,\le_S),(T,\le_T)$, 证明：要么 $|S|\le|T|$, 要么 $|T|\le|S|$.

提示：对于两个定义了序关系的集合 $(S,\le_S),(T,\le_T)$, 如果有一个双射 $\pi:S\to T$ 满足

$$\forall a,b\in S, a\le_S b \iff \pi(a)\le_T\pi(b)$$

那么我们称 π 是 $(S,\le_S),(T,\le_T)$ 之间的序同构（order isomorphism）.

提示：对于任意 $s\in S$, $t\in T$, 定义集合 S_s, T_t 为

$$S_s=\{a\in S|a<_S s\},\qquad T_t=\{b\in T|b<_T t\}.$$

考虑 $(S_s,\le_S),(T_t,\le_T)$ 之间是否存在序同构.

注意到, 假如我们使用选择公理, 那么任何集合都有良序. 这题说明选择公理蕴含了集合之间的势可以比较.

[2] 参见 Sequents and Trees 第 1.2.2 节.

解 首先我们按照提示定义序同构, 并把 S 和 T 序同构简记为 $S \sim T$. 易知"$\sim$"是等价关系, 即具有对称性和传递性.

我们需要（良）序同构的一个性质：不存在 S, S_s 的序同构.

证明. 假设这样一个序同构存在 $f: S \to S_s$. 那么一定存在一些 $x \in S$ s.t. $f(x) \neq x$. 用 x 表示其中最小的. 如果 $f(x) <_S x$, 那么 $f(f(x)) = f(x)$, 这与 f 是单射矛盾. 如果 $f^{-1}(x) <_S x$, 那么可以同时推出矛盾的 $f(f^{-1}(x)) = x$ 与 $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)$. 如果 $f(x) >_S x$ 且 $x <_S f^{-1}(x)$, 与 f 保序矛盾. □

我们证明一个更强的结论：

定理 1. 对于良序集 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$, 以下至少一种情况成立：

- $S \sim T$
- 存在 $s \in S, S_s \sim T$
- 存在 $t \in T, T_t \sim S$

定义集合

$$R := \left\{ (s,t) \middle| \begin{array}{c} s \in S \cup \{\infty\}, \\ t \in T \cup \{\infty\}, \\ S_s \sim T_t \end{array} \right\}$$

记 R 到两个分量的投影分别为

$$R_S := \{s | \exists t, (s,t) \in R\}, \qquad R_T := \{t | \exists s, (s,t) \in R\}.$$

首先梳理一下 R 的性质. 注意到 R 很类似一个函数：如果 $(s, t_1), (s, t_2) \in R$, 那么 $t_1 = t_2$.

证明. 由 $\sim$ 的传递性, $T_{t_1} \sim S_s \sim T_{t_2}$. 如果 $t_1 \neq t_2$, 就会违背前面已经证明的（良）序同构的性质. □

对称地, 如果 $(s_1, t), (s_2, t) \in R$, 那么 $s_1 = s_2$.

对任意 $s \in R_S$, 比其更小的 $s' \leq_S s$ 也一定在投影 R_S 中.

证明. 有序同构 $f: S_s \to T_t$. 注意到 f 也是 $S_{s'}$ 到 $T_{f(s')}$ 的序同构. □

因此 $R_S = S$ 或者 $R_S = S_{s^*}$, 其中 s^* 是 $S \setminus R_S$ 中的最小元. 对称地, $R_T = T$ 或者 $R_T = T_{t^*}$.

R 其实就是一个序同构 $\pi: R_S \to R_T$. 其定义为 $\pi(s) = t$ 当且仅当 $(s,t) \in R$.

证明. 已经证明 π 是双射, 只需再验证保序. 对任意 $s' \leq_S s$. 存在序同构 $f: S_s \to T_{\pi(s)}$. 注意到 f 也是 $S_{s'}$ 到 $T_{f(s')}$ 的序同构. 因此 $(s', f(s')) \in R$, 进而 $\pi(s') = f(s') <_T \pi(s)$. □

如果 $R_S = S$ 或 $R_T = T$, 直接得证；否则, 假设 $R_S = S_{s^*}$, $R_T = T_{t^*}$, 那么序同构 $\pi: S_{s^*} \to T_{t^*}$ 的存在说明了 $(s^*, t^*) \in R$, 这与 $s^* \notin R_S, t^* \notin R_T$ 矛盾.