

朴素集合论与命题逻辑

请在 9 月 18 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 使用自然演绎 (Natural deduction) ¹推出 $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$. 需要写明每步使用的推导规则.
2. (10 分) (1) 用自然演绎推导下面两个命题时, 哪个需要使用 RAA 规则, 哪个不需要使用 RAA 规则?
 - $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$
 - $((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))$(2) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统, 去掉 RAA 规则, 但是增加一个公理模式: 对于任何命题 ϕ , 可以把 $(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$ 直接作为公理使用. 证明: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ 可以被推出.
- (3) 现在我们考虑一个修改过的自然演绎系统, 去掉 RAA 规则, 但是增加一个公理模式: 对于任何命题 ϕ, ψ , 可以把 $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ 直接作为公理使用. 证明: 对于任何命题 ϕ , $(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$ 可以被推出.
3. (5 分) 用 System K² 证明 $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$, 也就是要推出 $\Rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$.
4. (5 分) 考虑两个定义了良序关系的集合 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$, 证明: 要么 $|S| \leq |T|$, 要么 $|T| \leq |S|$.
提示: 对于两个定义了序关系的集合 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$, 如果有一个双射 $\pi: S \rightarrow T$ 满足

$$\forall a, b \in S, a \leq_S b \iff \pi(a) \leq_T \pi(b)$$

那么我们称 π 是 $(S, \leq_S), (T, \leq_T)$ 之间的序同构 (order isomorphism) .

提示: 对于任意 $s \in S, t \in T$, 定义集合 S_s, T_t 为

$$S_s = \{a \in S | a <_S s\}, \quad T_t = \{b \in T | b <_T t\}.$$

考虑 $(S_s, \leq_S), (T_t, \leq_T)$ 之间是否存在序同构.

注意到, 假如我们使用选择公理, 那么任何集合都有良序. 这题说明选择公理蕴含了集合之间的势可以比较.

¹使用没有 \neg 和 \vee 的简化版. 参见 Logic and Structure 第 2.4 节.

²参见 Sequents and Trees 第 1.2.2 节.