自然演绎的完备性, 一阶逻辑

参考答案

1. (15 分) 考虑只包含连接词 $\to$ 和 $\wedge$ 的命题逻辑, 它的自然演绎系统（natural deduction system）包括如下内容:

   - 命题逻辑的公式, 包括永假常元 $\perp$.
   - 没有公理.
   - 推导规则如下:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2 \qquad \frac{\perp}{\phi} \perp$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I \qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\phi} \mathrm{RAA}$$

   其中, 横线上面是前提, 下面是推导的结果（结论）, 横线右边是规则的名字（例如 $\wedge I$）. 省略号表示省略的推导步骤; 方括号表示假设该公式已经推出, 在此基础上进行推理.

   我们将 $\phi \to \perp$ 缩写为 $\neg\phi$（注意, $\neg$ 不属于字符集）.

   (1) 证明: 对任意公式 ψ 和 ϕ, $\psi \vdash \phi$ 当且仅当 $\vdash \psi \to \phi$.

   (2) 利用自然演绎系统证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

   (3) 利用完全性定理（completeness theorem）证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

解

(1) $\Longrightarrow$ 由 $\to I$ 直接得到; $\Longleftarrow$ 由 $\to E$ 直接得到.

(2) 假设 ϕ 成立, 那么由 $\to E$, 我们有 ψ 和 $\neg\psi = \psi \to \perp$ 成立, 因此由 $\to E$, $\perp$ 成立, 再由 ϕ 假设的 $\to I$, $\phi \to \perp = \neg\phi$ 成立.

(3) 列真值表:

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi)$	$\neg\phi$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

因此 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vDash \neg\phi$, 由完全性定理, $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

2. (5 分) 考虑通常的命题逻辑自然演绎系统, 作为简化, 连接词只有 $\to$, 命题字母的集合为 P. 将推导规则除去 RAA, 我们就得到了直觉主义命题逻辑, 推理符号为 $\vdash_i$. 本题证明在经典的语义 $\vDash$ 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的（incomplete）, 即存在公式 $\phi, \vDash \phi$ 但 $\nvdash_i \phi$.

为此, 我们将会给一种新的语义 $\Vdash$. 考虑一个偏序集 $(W, \geq)$, 每一个 $w \in W$ 上都被赋予一些命题字母 $p, q, \ldots$, 由映射 $V : W \to 2^P$ 给出, 满足：如果 $v \geq w$, 那么 $V(v) \supseteq V(w)$. 语义 $\Vdash$ 可以被归纳定义为:

- $(W, V, w) \Vdash p$ 当且仅当 $p \in V(w)$.
- $(W, V, w) \Vdash \perp$ 永远不成立.
- $(W, V, w) \Vdash \psi \to \phi$ 当且仅当对所有 $v \geq w$, 如果 $(W, V, v) \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

符号 $\vDash_i \phi$ 表示 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 对所有 W, V, w 成立.

(1) 证明：如果 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 且 $v \geq w$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

(2) 证明一致性（soundness）定理：对任意公式 ϕ, 如果 $\vdash_i \phi$, 那么 $\vDash_i \phi$.

(3) 证明：公式 $\phi = ((p \to q) \to p) \to p$ 同时满足 $\vDash \phi$ 和 $\nvdash_i \phi$. 因而在经典语义 $\vDash$ 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的.

注. 语义 $\vDash_i$ 和语法 $\vdash_i$ 实际上满足完全性定理：对任意公式 ϕ, 如果 $\vDash_i \phi$, 那么 $\vdash_i \phi$.

解

(1) 用归纳法, 考虑 ϕ 是如何构造的.

- 假设 $\phi = p$ 或 $\phi = \perp$, 那么根据定义命题即成立.
- 假设 $\phi = \psi \to \phi$, 那么对所有的 $v' \geq w$, 如果 $(W, V, v') \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, w) \Vdash \phi$. 根据归纳假设, $(W, V, w') \Vdash \phi$ 对所有 $w' \geq w$ 成立, 因而也对 $w' = v$ 成立. 所以, 对所有 $v' \geq v$, 如果 $(W, V, v') \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$ 成立, 这就是在说 $(W, V, v) \Vdash \psi \to \phi$.

(2) 我们证明更强的结论：对公式集 Γ, 如果 $\Gamma \vdash_i \phi$, 那么 $\Gamma \vDash_i \phi$. 依然用归纳法, 考虑 $\Gamma \vdash_i \phi$ 是如何得到的.

- 如果 $\phi \in \gamma$, 那么平凡成立.
- 如果是用 $\to I$ 规则得到的, 那么 $\phi = \alpha \to \beta$. 根据规则的含义, 将 α 放入 Γ. 考虑任何 W, V, w, 假设 $(W, V, w) \Vdash \alpha$, 由 α 推出了 β, 根据归纳假设, 在这些 w 上会有 $(W, V, w) \Vdash \beta$. 取 $v \geq w$, 我们要证明 $(W, V, v) \Vdash \beta$. 根据第一问, $(W, V, v) \Vdash \beta$, 因此 $(W, V, w) \Vdash \alpha \to \beta$.
- 如果是用 $\to E$ 规则得到的, 那么 ϕ 是由 α 和 $\alpha \to \phi$ 推出的. 根据归纳假设, $\Gamma \Vdash \alpha$ 且 $\Gamma \Vdash \alpha \to \phi$. 考虑 (W, V, w) 满足 $(W, V, w) \Vdash \Gamma$, 对 $v \geq w$, 假设 $(W, V, v) \Vdash \alpha$, 因为 $(W, V, w) \Vdash \alpha \to \phi$, 根据定义 $(W, V, w) \Vdash \phi$, 所以 $\Gamma \Vdash \phi$.
- 如果是 $\perp$ 规则得到的, 根据归纳假设, $(W, V, w) \Vdash \perp$, 这与定义矛盾, 所以其实这一规则不会被使用.

(3) 我们需要给出一个模型 (W,V,w) 使得 $(W,V,w)\nVdash\phi$. 考虑模型 $W=\{a,b\}$, $a\geq b$, $V(a)=\{p\}$, $V(b)=\varnothing$, $w=b$. 容易验证, $(W,V,w)\Vdash\neg\phi$ 当且仅当对所有 $v\geq w$, $(W,V,v)\nVdash\phi$, 所以 $(W,V,w)\Vdash\neg\neg\phi$ 当且仅当存在 $v\geq w$ 使得 $(W,V,v)\Vdash\phi$. 注意, $(W,V,b)\Vdash\neg\neg p$, 但 $(W,V,a)\nVdash p$, 且 $a\geq b$, 所以这违背了蕴含的语义.

(4) 要证 $\vDash\phi$, 只需要讨论 p,q 的真假情况即可. 若 p 为真, 蕴含的结论部分为真, 因此整个 ϕ 为真; 若 p 为假, 则最里面蕴含的前提为假, 因此, 第二层蕴含的前提为真, 此外, 第二层蕴含的结论 p 为假, 所以第二层蕴含整体为假, 最外层蕴含（也就是 ϕ）的前提为假, 所以整体最外层蕴含 ϕ 整体为真.

接下来, 要证 $\nvdash_i\phi$, 根据第二问, 只需要证明 $\nvDash_i\phi$.

以下我们构造一个 W,V,w 使得 $(W,V,w)\nVdash\phi=((p\to q)\to p)\to p)$.

取 $W=\{w_1,w_2\}$, $w_1\geq w_2$, $V(w_1)=\{p\}$, $V(w_2)=\varnothing$.

则由于 $(W,V,w_1)\Vdash p,(W,V,w_1)\nVdash q$, 有 $(W,V,w_2)\nVdash(p\to q)$, 进而 $(W,V,w_2)\Vdash(p\to q)\to p$.

同时, 因为 $p\notin V(w_2)$, 有 $(W,V,w_2)\nVdash p$, 与 $(W,V,w_2)\nVdash(p\to q)$ 结合知 $(W,V,w_2)\nVdash\phi$.

3. (15 分) 考虑一阶逻辑, 它的变元是 $x,y,\ldots$, 至少包括一个二元谓词 P. 考虑公式 $\phi:=\exists x\forall yP(x,y)$, $\psi:=\forall y\exists xP(x,y)$.

(1) 用一阶逻辑的自然演绎（有 $\forall I,\forall E$ 规则, "$\exists$"是"$\neg\forall\neg$"的简记）推导出 $\vdash\phi\to\psi$.

(2) 证明: $\phi\to\psi$ 是有效的, 即对于任意解释 I, 都有 $I\vDash\phi\to\psi$.

(3) 给一个语义解释 I, 说明 $\psi\to\phi$ 不是有效的.

解

(1) 证明如下:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\neg P(x,y)]_1}{\neg P(x,y)}\forall E \quad \dfrac{[\forall yP(x,y)]_2}{P(x,y)}\forall E}{\bot}\to E}{\neg\forall yP(x,y)}\mathrm{RAA}_2}{\forall x\neg\forall yP(x,y)}\forall I \quad [\neg\forall x\neg\forall yP(x,y)]_3}{\bot}\to E}{\neg\forall x\neg P(x,y)}\mathrm{RAA}_1}{\forall y\neg\forall x\neg P(x,y)}\forall I}{\phi\to\psi}\to I_3
$$

(2) 我们证明, 只要 $I\vDash\phi$, 就有 $I\vDash\psi$. 假设 I 的论域（domain）是 D, P 的解释是 $\bar{P}$. $I\vDash\phi$ 的时候, 存在一个元素 $a\in D$, 对于任意 $b\in D$ 都成立 $\bar{P}(a,b)$. 因此, 任意 $b\in D$, 都存在不依赖于 b 的 $a\in D$ 使得 $\bar{P}(a,b)$ 为真. 这就证明了 $I\vDash\psi$.

(3) 例如, 论域为 $\mathbb{R}$, $P(x,y)$ 的解释为 $x=y$. 取 $x=y$, 显然有 $I\vDash\psi$, 然而, 并不存在一个元素 $x\in\mathbb{R}$ 等于所有的 y.

注. 这题旨在说明, 量词的顺序是非常重要的, 不能随便颠倒.