# 自然演绎的完备性, 一阶逻辑

请在 9 月 25 日课前提交纸质作业.

1. (15 分) 考虑只包含连接词 $\to$ 和 $\wedge$ 的命题逻辑, 它的自然演绎系统（natural deduction system）包括如下内容:
   - 命题逻辑的公式, 包括永假常元 $\perp$.
   - 没有公理.
   - 推导规则如下:

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E_1 \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge E_2 \qquad \frac{\perp}{\phi} \perp$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \mathcal{D} \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \to I \qquad \frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\phi} \mathrm{RAA}$$

   其中, 横线上面是前提, 下面是推导的结果（结论）, 横线右边是规则的名字（例如 $\wedge I$）. 省略号表示省略的推导步骤; 方括号表示假设该公式已经推出, 在此基础上进行推理.

   我们将 $\phi \to \perp$ 缩写为 $\neg\phi$（注意, $\neg$ 不属于字符集）.

   (1) 证明: 对任意公式 $\psi$ 和 $\phi$, $\psi \vdash \phi$ 当且仅当 $\vdash \psi \to \phi$.

   (2) 利用自然演绎系统证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

   (3) 利用完全性定理（completeness theorem）证明 $(\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi) \vdash \neg\phi$.

2. (5 分) 考虑通常的命题逻辑自然演绎系统, 作为简化, 连接词只有 $\to$, 命题字母的集合为 $P$. 将推导规则除去 RAA, 我们就得到了直觉主义命题逻辑, 推理符号为 $\vdash_i$. 本题证明在经典的语义 $\vDash$ 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的（incomplete）, 即存在公式 $\phi, \vDash \phi$ 但 $\nvdash_i \phi$.

   为此, 我们将会给一种新的语义 $\Vdash$. 考虑一个偏序集 $(W, \geq)$, 每一个 $w \in W$ 上都被赋予一些命题字母 $p, q, \ldots$, 由映射 $V : W \to 2^P$ 给出, 满足: 如果 $v \geq w$, 那么 $V(v) \supseteq V(w)$. 语义 $\Vdash$ 可以被归纳定义为:

   - $(W, V, w) \Vdash p$ 当且仅当 $p \in V(w)$.
   - $(W, V, w) \Vdash \perp$ 永远不成立.
   - $(W, V, w) \Vdash \psi \to \phi$ 当且仅当对所有 $v \geq w$, 如果 $(W, V, v) \Vdash \psi$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

   符号 $\vDash_i \phi$ 表示 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 对所有 $W, V, w$ 成立.

   (1) 证明: 如果 $(W, V, w) \Vdash \phi$ 且 $v \geq w$, 那么 $(W, V, v) \Vdash \phi$.

   (2) 证明一致性（soundness）定理: 对任意公式 $\phi$, 如果 $\vdash_i \phi$, 那么 $\vDash_i \phi$.

(3) 证明：公式 $\phi = ((p \to q) \to p) \to p$ 同时满足 $\vDash \phi$ 和 $\nvdash_i \phi$. 因而在经典语义 $\vDash$ 下, 直觉主义命题逻辑是不完全的.

**注.** 语义 $\vDash_i$ 和语法 $\vdash_i$ 实际上满足完全性定理：对任意公式 $\phi$, 如果 $\vDash_i \phi$, 那么 $\vdash_i \phi$.

3. (15 分) 考虑一阶逻辑, 它的变元是 $x, y, \ldots$, 至少包括一个二元谓词 $P$. 考虑公式 $\phi := \exists x \forall y P(x, y)$, $\psi := \forall y \exists x P(x, y)$.

(1) 用一阶逻辑的自然演绎（有 $\forall I, \forall E$ 规则, "$\exists$"是"$\neg\forall\neg$"的简记）推导出 $\vdash \phi \to \psi$.

(2) 证明：$\phi \to \psi$ 是有效的, 即对于任意解释 $I$, 都有 $I \vDash \phi \to \psi$.

(3) 给一个语义解释 $I$, 说明 $\psi \to \phi$ 不是有效的.