一阶逻辑, ZFC 集合论, Gödel 不完备定理

参考答案

1. (10 分) 令 Γ 表示如下公理集合, 不难看出它们是在 Peano 公理中不涉及乘法的公理.

$$\forall x\neg(0=S(x))$$
$$\forall xy(S(x)=S(y)\to x=y)$$
$$\forall x(x+0=x)$$
$$\forall xy(x+S(y)=S(x+y))$$
$$(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))))\to\forall x\varphi(x) \qquad \text{对任意 } \varphi$$

为了简化证明, 我们使用几个稍作修改的相等规则, 不再局限于变量符号. 它们都很容易从原有的相等公理使用一次 $\forall E$ 规则得出.

$$\frac{}{t=t}\,\mathrm{RI}_1^* \qquad \frac{t_1=t_2}{t_2=t_1}\,\mathrm{RI}_2^* \qquad \frac{t_1=t_2 \qquad t_2=t_3}{t_1=t_3}\,\mathrm{RI}_3^* \qquad \frac{t_1=t_2}{t(t_1)=t(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^* \qquad \frac{t_1=t_2}{\varphi(t_1)\to\varphi(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^*$$

作为例子, 我们给出 $\Gamma\vdash\forall x(0+x=x)$ 的证明. 记 $\varphi(x):=0+x=x$. 也就是要证明 $\forall x\varphi(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{0+0=0 \ \text{i.e.}\ \varphi(0)}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(x+S(y)=S(x+y))}{0+S(x)=S(0+x)}\,\forall E \qquad \dfrac{[0+x=x]}{S(0+x)=S(x)}\,\mathrm{RI}_4^*}{0+S(x)=S(x)}\,\mathrm{RI}_3^*}{0+x=x\to 0+S(x)=S(x) \ \text{i.e.}\ \varphi(x)\to\varphi(S(x))}\to I}{\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))}\,\forall \mathrm{I}}{\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))}\wedge I \qquad (\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))))\to\forall x\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}\to E$$

作为例子, 我们给出 $\Gamma\vdash\forall xy(S(x)+y=S(x+y))$ 的证明. 记 $\psi(y):=\forall x(S(x)+y=S(x+y))$. 也就是要证明 $\forall y\psi(y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{S(x)+0=S(x)}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{x+0=x}\,\forall E}{x=x+0}\,\mathrm{RI}_2^*}{S(x)=S(x+0)}\,\mathrm{RI}_4^*}{S(x)+0=S(x+0)}\,\mathrm{RI}_3^*}{\forall xS(x)+0=S(x+0) \ \text{i.e.}\ \psi(0)}\,\forall I$$

$$
\dfrac{\dfrac{\psi(0)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(x+S(y)=S(x+y))}{S(x)+S(y)=S(S(x)+y)}\,\forall\mathrm{E}\qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(S(x)+y=S(x+y))]\text{ i.e. }\psi(y)}{S(x)+y=S(x+y)}\,\forall E}{S(S(x)+y)=S(S(x+y))}\,\mathrm{RI}_4^*}{S(x)+S(y)=S(S(x+y))}\,\mathrm{RI}_3^*\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(x+S(y)=S(x+y))}{x+S(y)=S(x+y)}\,\forall\mathrm{E}}{S(x+S(y))=S(S(x+y))}\,\mathrm{RI}_4^*}{S(S(x+y))=S(x+S(y))}\,\mathrm{RI}_2^*}{S(x)+S(y)=S(x+S(y))\text{ i.e. }\psi(S(y))}\,\mathrm{RI}_3^*}{\psi(y)\to\psi(S(y))}\,\to\mathrm{I}}{\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y)))}\,\forall\mathrm{I}}{\psi(0)\land\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y))}\,\land I\qquad (\psi(0)\land\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y)))\to\forall y\psi(y)}{\forall y\psi(y)}\,\to E
$$

(1) 使用自然演绎法, 证明 $\Gamma\vdash\forall xy(x+y=y+x)$.

(2) 使用自然演绎法, 证明 $\Gamma\vdash\forall x(\exists z(0=x+z)\to x=0)$. 人们常用记号 $y\geq x$ 表示 $\exists z(y=x+z)$, 这时待证命题可以写为 $\forall x(0\geq x\to x=0)$.

可以直接使用例子中已经证明的命题. 后一问可以直接使用前一问的结论.

解

(1) 记 $\varphi(x):=\forall y(x+y=y+x)$, 也就是要证明 $\forall x\varphi(x)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(0+x=x)}{0+y=y}\,\forall\mathrm{E}\qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{y+0=y}\,\forall\mathrm{E}}{y=y+0}\,\mathrm{RI}_2^*}{0+y=y+0}\,\mathrm{RI}_2^*}{\forall y(0+y=y+0)}\,\forall\mathrm{I}
$$

$$\text{i.e. }\varphi(0)$$

$$
\dfrac{\dfrac{\varphi(0)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(S(x)+y=S(x+y))}{S(x)+y=S(x+y)}\,\forall\mathrm{E}\qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y(x+y=y+x)]\text{ i.e. }\varphi(x)}{x+y=y+x}\,\forall\mathrm{E}}{S(x+y)=S(y+x)}\,\mathrm{RI}_4^*}{S(x)+y=S(y+x)}\,\mathrm{RI}_3^*\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(x+S(y)=S(x+y))}{y+S(x)=S(y+x)}\,\forall\mathrm{E}}{S(y+x)=y+S(x)}\,\mathrm{RI}_2^*}{}}{\begin{gathered}S(x)+y=y+S(x)\\ \text{i.e. }\varphi(S(x))\end{gathered}}\,\mathrm{RI}_3^*}{\varphi(x)\to\varphi(S(x))}\,\to\mathrm{I}}{\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))}\,\forall\mathrm{I}}{\varphi(0)\land\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))}\,\land I\qquad (\varphi(0)\land\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))\to\forall x\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}\,\to E
$$

(2) 记 $\psi(x):=\exists z(0=x+z)\to x=0$, 也就是要证明 $\forall x\psi(x)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))\to\forall x\varphi(x)}
\AxiomC{}
\RightLabel{RI$_1$}
\UnaryInfC{0=0}
\AxiomC{[\exists z(x+z=0)]_4}
\RightLabel{$\to$I$_4$}
\BinaryInfC{\exists z(0+z=0)\to 0=0 \quad \text{i.e. } \psi(0)}
\AxiomC{[\psi(x)]_3}
\AxiomC{[\exists z(0=S(x)+z)]_2}
\AxiomC{\forall x\neg(0=S(x))}
\RightLabel{$\forall$E}
\UnaryInfC{\neg(0=S(x+z))}
\AxiomC{\forall xy(S(x)+y=S(x+y))}
\RightLabel{$\forall$E}
\UnaryInfC{S(x)+z=S(x+z)}
\RightLabel{RI$_2^*$}
\UnaryInfC{S(x+z)=S(x)+z}
\RightLabel{RI$_4^*$}
\UnaryInfC{\neg(0=S(x+z))\to\neg(0=S(x)+z)}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{\neg(0=S(x)+z)}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{\forall z\neg(0=S(x)+z)}
\RightLabel{$\to$E}
\BinaryInfC{\perp}
\RightLabel{$\perp$}
\UnaryInfC{S(x)=0}
\RightLabel{$\to$I$_2$}
\UnaryInfC{\exists z(0=S(x)+z)\to S(x)=0 \quad \text{i.e. } \psi(S(x))}
\RightLabel{$\to$I$_3$}
\BinaryInfC{\psi(x)\to\psi(S(x))}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{\forall x(\psi(x)\to\psi(S(x)))}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{\forall x\varphi(x)}
\end{prooftree}
$$

2. (10 分) 考虑 ZFC 集合论, 它的变元是 $x, y, \ldots$, 谓词包括 $\in, =$.

(1) "存在且唯一"的符号是 $\exists!$, 请用 ZFC 公式给出它的定义. 也就是说, 给一个公式 ϕ_A, 使得 ϕ_A 表示 $\exists! x A(x)$, 读作"存在唯一的 x 使 $A(x)$ 成立".

(2) 利用第一问的记号, 给出二元关系 R 是从集合 X 到集合 Y 的函数关系的 ZFC 公式定义.

提示: 第二问的公式中允许使用集合论的常用符号, 例如交 $\cap$、并 $\cup$、包含 $\subseteq$、笛卡尔积 $\times$、序对 (x, y)、子集符号 $\{x \in X : \phi(x)\}$, 幂集符号 2^X 等.

解

(1) ϕ_A 写作 $\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \to (x = y)))$.

(2) $(R \subseteq X \times Y) \wedge \forall x(x \in X \to (\exists! y(y \in Y \wedge (x, y) \in R)))$.

注. 我们还可以继续简化符号, 例如 $\forall x \in A\ P(x)$ 是 $\forall x(x \in A \to P(x))$ 的缩写; $\exists x \in A\ P(x)$ 是 $\exists x(x \in A \wedge P(x))$ 的缩写.

3. (15 分) 考虑 ZFC 集合论, 本题讨论正则公理.

(1) 证明, 不存在一对互相包含的集合 x, y. 即证明 $\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$.

(2) 证明, 不存在一列集合 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ 满足 $\forall i \in \mathbb{N}, x_{i+1} \in x_i$.

(3) 在保留 ZFC 中其它公理的前提下, 证明前一问的命题可以推出正则公理.

解

(1) 这题是第二题的特殊情况, 因为如果存在, 那么我们就可以构造无穷序列 $x \ni y \ni x \ni y \ni \ldots$.

(2) 假设存在 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ 满足 $x_{i+1} \in x_i$, 这个形式上是一个映射 $f : i \mapsto\to x_i$. 用归纳公理和替换公理模式, 可以构造集合 $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$.

这样使用正则公理, X 应当包含一个元素 $z = x_n$ 与自身交为空集. 但是 $x_{n+1} \in (x_n \cap X)$, 矛盾. 因此假设不成立, 得证.

(3) 假设正则公理不成立, 即假设存在集合 A, 使得任意 $x \in A$, 成立 $x \cap A \neq \varnothing$. 考虑从 A 中取出一个元素 x_1, 由于 $x_1 \cap A \neq \varnothing$, 所以存在 $x_2 \in x_1 \cap A$.

因为 $x_2 \in A$, 所以根据假设, $x_2 \cap A \neq \varnothing$, 继续取 $x_3 \in x_2 \cap A \ldots$ 这样就构造了一个序列 $x_1, x_2, \ldots$ 满足 $x_{i+1} \in x_i$, 与 (2) 的命题矛盾. 正则公理得证.

4. (5 分) 在这个问题中, 我们试图构造一个比 ZFC 更近完备的形式系统.

令 Ω 表示 ZFC 使用的字母表允许出现的所有不含自由变量的合式公式（closed well-formed formula）, 可以写为 $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

用以下方式递归定义 T_i, F_i, Γ_i:

- 令 T_0 表示所有 ZFC 可以推理演绎得到的命题. 令 $F_0 := \{\text{“}\varphi\text{”} | \text{“}\neg\varphi\text{”} \in T_0\}$ 表示 T_0 中命题的否命题, 也就是 ZFC 可以“否定”的命题. 根据 Gödel 的不完备定理, 我们知道或者 $T_0 \cap F_0 \neq \varnothing$ (不一致), 或者 $T_0 \cup F_0 \not\supseteq \Omega$ (不完备). 我们暂且假设 ZFC 是一致的.
- 令 $\Gamma_0 = \varnothing$.
- 如果 $\varphi_i \in T_{i-1} \cup F_{i-1}$, 那么定义 $T_i := T_{i-1}, F_i := F_{i-1}, \Gamma_i := \Gamma_{i-1}$.
- 如果 $\varphi_i \notin T_{i-1} \cup F_{i-1}$, 那么定义 $\Gamma_i := \Gamma_{i-1} \cup \{\varphi_i\}$. 令 T_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以推理演绎得到的命题. 令 F_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以“否定”的命题.

不难看出, $T_i \supseteq T_{i-1}, F_i \supseteq F_{i-1}, \Gamma_i \supseteq \Gamma_{i-1}$ 并且 $T_{i-1} \cap F_{i-1} = \varnothing \implies T_i \cap F_i = \varnothing$. 令 $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$. 那么 $T = \bigcup_i T_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以推理演绎得到的命题, $F = \bigcup_i F_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以“否定”的命题. 且 $T \cup F \supseteq \Omega$. 也就是说, 如果把 Γ 中的命题都作为公理加入 ZFC, 可以在不破坏一致性的同时获得完备性.

判断上述结论是否违反了 Gödel 不完备定理. 如果是, 请指出证明中的错误. 如果否, 请解释.

解 不违背. Gödel 不完备定理适用于递归可枚举的公理系统, 而我们对 Γ 的构造实际上加入了无穷多个公理, 并且这些公理并不存在一个递归可枚举的表示方式, 所以不违背. 具体而言, 我们只是形式上定义了 Γ, 但不知道如何有效判定一个命题是否属于 Γ. (不存在递归可枚举的判定方法, 否则会与 Gödel 不完备定理矛盾.)

递归可枚举的严格定义可以参考教材, 其等价于图灵机的 recognizable.

注. *注意, ZFC 也是有无穷条公理的, 例如分离公理和替换公理, 这些公理中的涉及的命题都是不能在一阶逻辑中枚举的, 所以他们实际上是公理模式而不是公理. 然而, 这些公理模式存在有限的表示方式, 是递归可枚举的.*