一阶逻辑, ZFC 集合论, Gödel 不完备定理

请在 10 月 9 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 令 Γ 表示如下公理集合, 不难看出它们是在 Peano 公理中不涉及乘法的公理.

$$\begin{array}{ll}
\forall x \neg(0 = S(x)) & \\
\forall xy(S(x) = S(y) \to x = y) & \\
\forall x(x + 0 = x) & \\
\forall xy(x + S(y) = S(x + y)) & \\
(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x\varphi(x) & \qquad \text{对任意 } \varphi
\end{array}$$

为了简化证明, 我们使用几个稍作修改的相等规则, 不再局限于变量符号. 它们都很容易从原有的相等公理使用一次 $\forall E$ 规则得出.

$$\frac{}{t = t}\,\mathrm{RI}_1^* \qquad \frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\,\mathrm{RI}_2^* \qquad \frac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\,\mathrm{RI}_3^* \qquad \frac{t_1 = t_2}{t(t_1) = t(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^* \quad \frac{t_1 = t_2}{\varphi(t_1) \to \varphi(t_2)}\,\mathrm{RI}_4^*$$

作为例子, 我们给出 $\Gamma \vdash \forall x(0 + x = x)$ 的证明. 记 $\varphi(x) := 0 + x = x$. 也就是要证明 $\forall x\varphi(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\forall x(x+0=x)}{0+0=0}\,\forall E \\ \text{i.e. } \varphi(0)\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xy(x+S(y)=S(x+y))}{0+S(x)=S(0+x)}\,\forall E \qquad \dfrac{[0+x=x]}{S(0+x)=S(x)}\,\mathrm{RI}_4^*}{0+S(x)=S(x)}\,\mathrm{RI}_3^*}{0+x=x \to 0+S(x)=S(x)}\,\to I \\ \text{i.e. } \varphi(x)\to\varphi(S(x))\end{array}}{\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))}\,\forall \mathrm{I}}{\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x))}\,\wedge I \qquad (\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\to\varphi(S(x)))\to\forall x\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}\,\to E$$

作为例子, 我们给出 $\Gamma \vdash \forall xy(S(x) + y = S(x + y))$ 的证明. 记 $\psi(y) := \forall x(S(x) + y = S(x + y))$. 也就是要证明 $\forall y\psi(y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{S(x)+0=S(x)}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(x+0=x)}{x+0=x}\,\forall E}{x=x+0}\,\mathrm{RI}_2^*}{S(x)=S(x+0)}\,\mathrm{RI}_4^*}{S(x)+0=S(x+0)}\,\mathrm{RI}_3^*}{\forall x S(x)+0=S(x+0) \text{ i.e. } \psi(0)}\,\forall I$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\psi(0)$}
\AxiomC{$\forall xy(x+S(y)=S(x+y))$}
\RightLabel{$\forall$E}
\UnaryInfC{$S(x)+S(y)=S(S(x)+y)$}
\AxiomC{$[\forall x(S(x)+y=S(x+y))]$ i.e. $\psi(y)$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$S(x)+y=S(x+y)$}
\RightLabel{RI_4^*}
\UnaryInfC{$S(S(x)+y)=S(S(x+y))$}
\RightLabel{RI_3^*}
\BinaryInfC{$S(x)+S(y)=S(S(x+y))$}
\AxiomC{$\forall xy(x+S(y)=S(x+y))$}
\RightLabel{$\forall$E}
\UnaryInfC{$x+S(y)=S(x+y)$}
\RightLabel{RI_4^*}
\UnaryInfC{$S(x+S(y))=S(S(x+y))$}
\RightLabel{RI_2^*}
\UnaryInfC{$S(S(x+y))=S(x+S(y))$}
\RightLabel{RI_3^*}
\BinaryInfC{$S(x)+S(y)=S(x+S(y))$ i.e. $\psi(S(y))$}
\RightLabel{$\to$I}
\UnaryInfC{$\psi(y)\to\psi(S(y))$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y)))$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\psi(0)\wedge\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y))$}
\AxiomC{$(\psi(0)\wedge\forall y(\psi(y)\to\psi(S(y)))\to\forall y\psi(y)$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\forall y\psi(y)$}
\end{prooftree}
$$

(1) 使用自然演绎法, 证明 $\Gamma\vdash\forall xy(x+y=y+x)$.

(2) 使用自然演绎法, 证明 $\Gamma\vdash\forall x(\exists z(0=x+z)\to x=0)$. 人们常用记号 $y\geq x$ 表示 $\exists z(y=x+z)$, 这时待证命题可以写为 $\forall x(0\geq x\to x=0)$.

可以直接使用例子中已经证明的命题. 后一问可以直接使用前一问的结论.

2. (10 分) 考虑 ZFC 集合论, 它的变元是 $x,y,\ldots$, 谓词包括 $\in,=$.

(1) "存在且唯一"的符号是 $\exists!$, 请用 ZFC 公式给出它的定义. 也就是说, 给一个公式 ϕ_A, 使得 ϕ_A 表示 $\exists!xA(x)$, 读作"存在唯一的 x 使 $A(x)$ 成立".

(2) 利用第一问的记号, 给出二元关系 R 是从集合 X 到集合 Y 的*函数关系*的 ZFC 公式定义.

提示: 第二问的公式中允许使用集合论的常用符号, 例如交 $\cap$、并 $\cup$、包含 $\subseteq$、笛卡尔积 $\times$、序对 (x,y)、子集符号 $\{x\in X:\phi(x)\}$, 幂集符号 2^X 等.

3. (15 分) 考虑 ZFC 集合论, 本题讨论正则公理.

(1) 证明, 不存在一对互相包含的集合 x,y. 即证明 $\forall x\forall y\neg(x\in y\wedge y\in x)$.

(2) 证明, 不存在一列集合 $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ 满足 $\forall i\in\mathbb{N},x_{i+1}\in x_i$.

(3) 在保留 ZFC 中其它公理的前提下, 证明前一问的命题可以推出正则公理.

4. (5 分) 在这个问题中, 我们试图构造一个比 ZFC 更近完备的形式系统.

令 Ω 表示 ZFC 使用的字母表允许出现的所有不含自由变量的合式公式（closed well-formed formula）, 可以写为 $\Omega=\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$.

用以下方式递归定义 T_i,F_i,Γ_i:

- 令 T_0 表示所有 ZFC 可以推理演绎得到的命题. 令 $F_0:=\{``\varphi"|``\neg\varphi"\in T_0\}$ 表示 T_0 中命题的否命题, 也就是 ZFC 可以"否定"的命题. 根据 Gödel 的不完备定理, 我们知道或者 $T_0\cap F_0\neq\varnothing$ (不一致), 或者 $T_0\cup F_0\not\supseteq\Omega$ (不完备). 我们暂且假设 ZFC 是一致的.
- 令 $\Gamma_0=\varnothing$.
- 如果 $\varphi_i\in T_{i-1}\cup F_{i-1}$, 那么定义 $T_i:=T_{i-1},F_i:=F_{i-1},\Gamma_i:=\Gamma_{i-1}$.
- 如果 $\varphi_i\notin T_{i-1}\cup F_{i-1}$, 那么定义 $\Gamma_i:=\Gamma_{i-1}\cup\{\varphi_i\}$. 令 T_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以推理演绎得到的命题. 令 F_i 表示所有 ZFC + Γ_i 可以"否定"的命题.

不难看出, $T_i \supseteq T_{i-1}, F_i \supseteq F_{i-1}, \Gamma_i \supseteq \Gamma_{i-1}$ 并且 $T_{i-1} \cap F_{i-1} = \varnothing \implies T_i \cap F_i = \varnothing$. 令 $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i$. 那么 $T = \bigcup_i T_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以推理演绎得到的命题, $F = \bigcup_i F_i$ 是所有 ZFC + Γ 可以"否定"的命题. 且 $T \cup F \supseteq \Omega$. 也就是说, 如果把 Γ 中的命题都作为公理加入 ZFC, 可以在不破坏一致性的同时获得完备性.

判断上述结论是否违反了 Gödel 不完备定理. 如果是, 请指出证明中的错误. 如果否, 请解释.