环

参考答案

1. (10 分) 对任意集合 S, 用 $M_n(S)$ 表示 S 中元素构成的 $n\times n$ 矩阵的集合.
   (1) 给定一个域 $\mathbb{F}$, 证明 $M_n(\mathbb{F})$ 是单环, 即不存在非平凡理想.
   (2) 给定一个环 R, 证明 $M_n(R)$ 的理想一定形如 $M_n(I)$, 其中 I 是 R 的理想.
   (3) 证明 $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.

解

(1) 这是第二问的特殊情况.

(2) 考虑 $M_n(R)$ 的一个理想 J, 用

$$I=\left\{x\in R\;\middle|\;\exists M\in J,\exists i,j \text{ s.t. } x=M_{i,j}\right\}$$

表示所有在 J 中出现的元素. 显然 $J\subseteq M_n(I)$.

用 $E^{(i,j)}$ 表示第 i 行 j 列为 1, 其它位置为 0 的矩阵. 对任何 $x\in I$, 有 $M\in J$ 满足 $M_{i,j}=x$, 所以 $\forall l,r\in R$

$$lxrE^{(a,b)}=(lE^{(a,i)})M(rE^{(j,b)})\in J.$$

进一步, 因为理想对加法封闭, 所以 $M_n((I))\subseteq J$.

总结一下, $M_n((I))\subseteq J\subseteq M_n(I)\subseteq M_n((I))$. 所以 $I=(I)$ 是一个理想, 并且 $J=M_n(I)$.

(3) 考虑自然环同态 $\phi: M_n(R)\to M_n(R/I)$,

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n,1} & \cdots & r_{n,n}\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} r_{1,1}+I & \cdots & r_{1,n}+I\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n,1}+I & \cdots & r_{n,n}+I\end{bmatrix}$$

它是满同态, 并且核为 $M_n(I)$. 因此 $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.

2. (10 分) 证明环版本的中国剩余定理. 给定一个含幺交换环 R 以及若干真理想 (proper ideals) $I_1,\ldots,I_k$. 这些理想之间两两互素, 也就是 $R=I_a+I_b$. 证明

$$R/I_1I_2\ldots I_k\cong(R/I_1)\times(R/I_2)\times\cdots\times(R/I_k).$$

为此, 我们先证明几个小结论

(1) 如果理想 I,J 互素, 那么 $IJ=I\cap J$.

(2) 如果理想 I,J 互素, 那么 $R/(I\cap J)\cong(R/I)\times(R/J)$.

(3) 如果理想 I, J, K 两两互素, 那么 IJ, K 互素.

(4) 证明环版本的中国剩余定理.

解

(1) 显然 $IJ \subseteq I \cap J$.

另一方向: 因为 $I + J = R \ni 1$, 所以有 $i \in I, j \in J$ 使得 $1 = i + j$. 考虑任意 $r \in I \cap J$,

$$r = r(i+j) = \underbrace{ri}_{r \in J, i \in I} + \underbrace{rj}_{r \in I, j \in J} \in IJ.$$

(2) 定义映射 $\phi : R \to (R/I) \times (R/J)$ 为 $\phi(x) = (x + I, x + J)$. 验证定义可知该映射为环同态. 由于 $R = I + J$, 存在 $i \in I, j \in J$ 使得 $1 = i + j$. 考虑 $(R/I) \times (R/J)$ 的任意元素 $(r_1 + I, r_2 + J)$,

$$\phi(r_1 j + r_2 i) = (r_1 j + r_2 i + I, r_1 j + r_2 i + J) = (r_1 j + r_1 i + I, r_2 j + r_2 i + J) = (r_1 + I, r_2 + J).$$

因此, ϕ 为满同态. 这个同态的核是 $I \cap J$

$$x \in \operatorname{Ker} \phi \iff x + I = I \wedge x + J = J \iff x \in I \wedge x \in J \iff x \in I \cap J.$$

由环同态定理, 得 $R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$.

(3) $R = (I + K)(J + K) = IJ + IK + JK + K = IJ + K$.

(4)

$$\begin{aligned}
(R/I_1) \times (R/I_2) \times (R/I_3) \times (R/I_4) \times \cdots \times (R/I_k) \\
\cong (R/I_1 I_2) \times (R/I_3) \times (R/I_4) \times \cdots \times (R/I_k) \\
\cong (R/I_1 I_2 I_3) \times (R/I_4) \times \cdots \times (R/I_k) \\
\cong \ldots \cong R/I_1 I_2 \ldots I_k.
\end{aligned}$$

3. (10 分) 考虑环的两个性质

- ACC 指不存在理想的无穷严格上升列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$
- DCC 指不存在理想的无穷严格下降列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq \ldots$

课上证明 PID 是 UFD 时, 实际就是证明 PID 环必满足 ACC.

(1) 给出一个满足 ACC 但不满足 DCC 的整环的例子.

(2) 证明满足 DCC 的整环（无零因子含单位元的交换环）一定满足 ACC. Remark: 实际上该环一定是域, 所以满足 ACC.

解

(1) 整数环 $\mathbb{Z}$ 满足 ACC 但不满足 DCC. 整数环 $\mathbb{Z}$ 是 PID 所以满足 ACC. 整数环 $\mathbb{Z}$ 存在理想的无穷下降列 $\mathbb{Z} \supsetneq 2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \supsetneq \ldots$

(2) 我们直接证明满足 DCC 的整环是域. 因为域只有平凡理想, $\{0\}$ 和域本身, 因此一定满足 ACC.

为此, 我们只需证明这个环是除环, 即任意不等于 0 的元都可逆. 不妨令 $a \neq 0$ 是任意一个非零元, 考虑以下理想

$$I_1 = (a), \quad I_2 = (a^2), \quad I_3 = (a^3), \quad I_4 = (a^4), \quad \ldots$$

显然 $I_i \supseteq I_{i+1}$, 这是因为 $a^{i+1} \in (a^i) = I_i$. 由 DCC 条件, 一定存在 k 使得 $I_k = (a^k) = (a^{k+1}) = I_{k+1}$, 特别地, $a^k \in (a^{k+1})$. 因为这是一个交换环, a^k 属于 (a^{k+1}) 说明 a^k 是 a^{k+1} 的倍数, 即存在 c 使得 $a^k = ca^{k+1}$. 这样就得到 $(ca-1)a^k = 0$. 又因为这个环是整环且 $a \neq 0$, 只能是 $ca - 1 = 0$. 说明 c 是 a 的逆元, a 可逆.