环

请在 10 月 30 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 对任意集合 S, 用 $M_n(S)$ 表示 S 中元素构成的 $n \times n$ 矩阵的集合.
   (1) 给定一个域 $\mathbb{F}$, 证明 $M_n(\mathbb{F})$ 是单环, 即不存在非平凡理想.
   (2) 给定一个环 R, 证明 $M_n(R)$ 的理想一定形如 $M_n(I)$, 其中 I 是 R 的理想.
   (3) 证明 $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.

2. (10 分) 证明环版本的中国剩余定理. 给定一个含幺交换环 R 以及若干真理想 (proper ideals) $I_1, \ldots, I_k$. 这些理想之间两两互素, 也就是 $R = I_a + I_b$. 证明

$$R/I_1 I_2 \ldots I_k \cong (R/I_1) \times (R/I_2) \times \cdots \times (R/I_k).$$

   为此, 我们先证明几个小结论
   (1) 如果理想 I, J 互素, 那么 $IJ = I \cap J$.
   (2) 如果理想 I, J 互素, 那么 $R/(I \cap J) \cong (R/I) \times (R/J)$.
   (3) 如果理想 I, J, K 两两互素, 那么 IJ, K 互素.
   (4) 证明环版本的中国剩余定理.

3. (10 分) 考虑环的两个性质
   - ACC 指不存在理想的无穷严格上升列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \ldots$
   - DCC 指不存在理想的无穷严格下降列. 即不存在无穷个理想 $I_1, I_2, \ldots$ 满足 $I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq \ldots$

   课上证明 PID 是 UFD 时, 实际就是证明 PID 环必满足 ACC.
   (1) 给出一个满足 ACC 但不满足 DCC 的整环的例子.
   (2) 证明满足 DCC 的整环（无零因子含单位元的交换环）一定满足 ACC. Remark: 实际上该环一定是域, 所以满足 ACC.