# 计数, 容斥原理

请在 11 月 13 日课前提交纸质作业.

1. (5 分) 定义 $R_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}2^{-k}$. 化简 $R_n$ 的表达式.

2. (5 分) 定义 $R_n = \sum_{k\leq n}\binom{n-k}{k}(-1)^k$. 化简 $R_n$ 的表达式.

3. (10 分) 每一个置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 都可以写成若干不交的轮换.

   (1) 对任意 $k > n/2$, 问有多少个置换包含一个长度恰好为 $k$ 的轮换.

   (2) 对任意 $\alpha > 1/2$, 对一个随机的置换 $g \in \mathrm{Sym}(n)$ 包含一个长度至少为 $\alpha n$ 的轮换的概率大概是多少. 这里假设 $n$ 充分大.

   **注.** *(这往往会被包装为以下问题.)* 监狱中有 $n$ 位囚犯. 现在让他们进行如下游戏. 在房间里布置标号 $1, \ldots, n$ 的 $n$ 个柜子, 其中分别写有 $n$ 个囚犯的名字. 每个囚犯分别被带到房间中, 允许打开其中至多 $\alpha n$ 个柜子. 如果所有囚犯都找到了包含自己名字的柜子, 那么所有囚犯都被释放. 否则, 所有囚犯都被处死. 游戏开始后囚犯之间不能交流. 请问囚犯应该采取怎样的策略.

4. (10 分) 给定一个函数 $f : 2^{[n]} \to \mathbb{R}$. 证明如果定义 $\tilde{f}(S) = \sum_{T\supseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T\supseteq S}(-1)^{|T\setminus S|}\tilde{f}(T).$$

   *Remark:* 对于一组有限集 $A_1, \ldots, A_n$ 和 $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 如果定义

$$f(S) = |\{x \in \Omega | \forall i \in [n], x \in A_i \iff i \in S\}|,$$

   那么题目结论可以推出容斥原理.

   *Remark:* 对称地，如果定义 $\hat{f}(S) = \sum_{T\subseteq S} f(T)$，那么

$$f(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S\setminus T|}\hat{f}(T).$$

5. (10 分) 令 $M \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个有限域 $\mathbb{F}$ 上的 $n \times n$ 矩阵. 定义 $M$ 是一个 MDS（maximum distance separable）矩阵，当且仅当对任何不同的 $x, x' \in \mathbb{F}^n$，$(Mx, x)$ 和 $(Mx', x')$ 至少在 $n+1$ 个位置不同. 不难证明以下命题等价，

   a. $M$ 是 MDS 矩阵;

   b. $M$ 可逆，且 $M^{-1}$ 是 MDS 矩阵;

   c. $M$ 的任何子矩阵满秩;

   d. 对任何非零 $x \in \mathbb{F}^n$，$(Mx, x)$ 至少在 $n+1$ 个位置非零.

e. 考虑方程 $(y_1,\dots,y_n)=M(x_1,\dots,x_n)$，任意固定 $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ 中的 $n$ 个变量，方程仍有解；

f. 考虑方程 $(y_1,\dots,y_n)=M(x_1,\dots,x_n)$，任意固定 $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ 中的 $n$ 个变量，方程有唯一解.

由等价命题 c 可以看出，当 $|\mathbb{F}|$ 足够大时，大部分矩阵都是 MDS 矩阵. 因此，可以说 MDS 刻画了“一般的”矩阵.

(1) 若 $M\in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{F})$ 是一个 MDS 矩阵，求出满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $x_1,\dots,x_{2n}$ 均不为 0 的解的个数.

提示：对每个集合 $S\subseteq[2n]$，计算满足 $(x_{n+1},\dots,x_{2n})=M(x_1,\dots,x_n)$ 且 $x_i=0 \iff i\in S$ 的解的个数.

(2) 记上问求出的解的个数为 $L$. 证明

$$\left|L-\frac{(|\mathbb{F}|-1)^{2n}}{|\mathbb{F}|^n}\right|\le 2^{2n}.$$

6. (10 分) 设 $k\ge 1$ 是整数，找到最小的 $d$，使得对任意 $n$，都存在一个 $\mathbb{F}_2$ 上的次数不超过 $d$ 的多项式 $f(x_1,\dots,x_n)$

$$\forall x_1,\dots,x_n\in\{0,1\},\ f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1, & \text{if } x_1,\dots,x_n \text{ 中 1 的个数} \equiv -1 \pmod{2^k}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

提示：先考虑 $n=2^k-1$ 的情况.