计数, 生成函数, Burnside & Pólya

参考答案

1. (10 分) 令 t_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的个数. 不妨令 $t_0 = 0$. 其初始几项为

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 9, \quad t_4 = 64, \ldots$$

   (1) 求出 t_n 的通项公式.

   提示:

   (2) 考虑 t_n 的 EGF $\tilde{T}(x) = \sum_i \frac{1}{n!} t_n x^n$. $\tilde{T}(x)$ 是一个简洁的方程的解, 请找到这个 (超越) 方程.

解

(1) $t_n = n^{n-1}$.

设标号集合为一个全序集 S. 根据提示, 考虑 Prüfer 序列的编码: 每次删除标号最小的叶子, 并记录被删除点的父节点. 这样定义了一个从带标号有根树到 S^{n-1} 的映射. 将这个映射记作 ϕ_S.

接下来, 我们证明 ϕ_S 是一个双射. 也就是给定任意序列 $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in S^{n-1}$, 都存在唯一的原像. 注意到序列中出现的点是所有非叶子节点. 因此 $S \setminus \{a_i\}$ 是所有叶子节点的集合, 这个集合一定非空. 令 b 是集合中的最小值, 那么 b 就是第一个被删除的节点, 且 b 是 a 的孩子.

注意到, 删除 b 后, 剩下的树被 $\phi_{S\setminus\{b\}}$ 映射到 $(a_2, \ldots, a_{n-1})$. 我们归纳地假设当点数更少时 ϕ 是双射, 因此有唯一原像 $\phi^{-1}_{S\setminus\{b\}}(a_2, \ldots, a_{n-1})$. 将 b 添加为 a 的孩子便得到了 $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ 的唯一原像.

(2) 令 f_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的森林的个数. 用 $\tilde{F}(x)$ 表示其生成函数.

一颗有根树的根节点有 n 种选择, 删去根节点后得到 $n-1$ 个组成的森林. 因此 $t_n = nf_{n-1}$. 故

$$\tilde{T}(x) = \sum_{n\geq 1} t_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} n f_{n-1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} f_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^{n+1}}{n!} = x\tilde{F}(x).$$

另一方面, 一个 n 个点的森林, 是将 n 个点任意分划为若干组, 每组中的点组成一个有根树. 故

$$\tilde{F}(x) = \sum_k \underbrace{\frac{1}{k!}\tilde{T}^k(x)}_{n\text{ 点 }k\text{ 树的森林数目}} = e^{\tilde{T}(x)}.$$

所以 $\tilde{T}(x) = xe^{\tilde{T}(x)}$.

2. (5 分) 设 G 是点集 $V = [n]$ 上的一个简单无向图. 图中的点形成了 k 个联通子块 $S_1, \ldots, S_k \subseteq V$. 向 G 添加 $k-1$ 条边, 使得图联通. 问有多少种不同的添加边的方法.

提示: 如果每个联通子块都是单点集, 那么题目就是在问有标号的 k 个点组成的无根树的个数.

解 使用类似 Prüfer 编码 (第 7 次作业), 构造一个从所有添边方法到 $V^{k-2} \times S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k$ 的双射.

考虑以下编码过程

- 把 $S_1, \ldots, S_k$ 都视作一个节点. 已经添加边的联通图是一个 k 点树.
- for $t = 1, \ldots, k-1$:

  找到图中标号最小的叶子节点, 记叶子是 S_{L_t}, 其邻居是 S_{P_t}, 之间的边为 $(l_t, p_t) \in S_{L_t} \times S_{P_t}$.

  将 S_{L_t} 从图中删除.
- 定义 $r_1 \in S_1, \ldots, r_k \in S_k$, 其中 $r_{L_t} = l_t$, $r_k = p_{k-1}$.

  编码为 $(p_1, \ldots, p_{k-2}, r_1, \ldots, r_k)$.

解码过程为: $(p_1, \ldots, p_{k-2})$ 包含了 $(P_1, \ldots, P_{k-2})$, 利用 Prüfer 编码的解码得到所有 (L_t, P_t), 确定了 $S_1, \ldots, S_k$ 组成的树. 进而确定所有 (l_t, p_t).

3. (5 分) 用 $C \geq 6$ 种颜色对立方体进行面染色, 要求相邻面的颜色不能相同. 求有多少种不同的染色方案. 两个染色方案等价, 当且仅当其中一种方案可以经过旋转 (不包括镜像) 转化为另一种方案.

解 立方体旋转群的阶为 24, 各个旋转的不动点个数如下表:

旋转群	个数	不动点个数
不动	1	$C(C-1)(C-2)^2 + 2C(C-1)(C-2)(C-3)^2$ $+ C(C-1)(C-2)(C-3)(C-4)^2$
面心-面心 $\pm 90°$	6	0
面心-面心 $180°$	3	$C(C-1)(C-2)^2$
棱心-棱心 $180°$	6	0
对顶角线 $\pm 120°$	8	0

由 Burnside 引理, 非等价方案数

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24}(C(C-1)(C-2)^2 + 2C(C-1)(C-2)(C-3)^2 \\ &\quad + C(C-1)(C-2)(C-3)(C-4)^2 + 3C(C-1)(C-2)^2) \\ =&\frac{1}{24}C(C-1)(C-2)(C^3 - 9C^2 + 32C - 38)\end{aligned}$$

4. (10 分) 令 $\mathbb{F}$ 是一个有限域. 考虑对域中的每个数用 C 种颜色之一染色. 每个染色方案可以表示为一个映射 $f : \mathbb{F} \to C$. (这里 $C := \{0, 1, \ldots, C-1\}$.) 考虑在仿射变换下仍然不同的染色方法数. 严格来说, 我们说两个染色方案 f, f' 是等价的, 当且仅当存在一个 $\mathbb{F}$ 上的可逆仿射映射 $g : x \mapsto ax + b$ (这里 $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{F}$), 使得 $f' = f \circ g$.

当 $|\mathbb{F}| = 7^5 = 16807 = 2 \times 3 \times 2801 + 1$, 请计算在仿射变换下仍然不同的染色方法数?

提示：不妨先考虑一般的有限域 $|\mathbb{F}| = p^k$. 对任何有限域 $\mathbb{F}$, 其乘法群 $\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 是循环群.

解 使用 Pólya/Burnside 计数时需要枚举所有的仿射变换 $g : x \mapsto ax + b$, 并计算在 g 作用下不变的染色方案数（不动点数）. 枚举 g 时, 我们分成几种情况考虑.

- 若 $a = 1, b = 0$: 这时 g 就是恒等映射, 所有 $C^{|\mathbb{F}|}$ 个染色都在 g 的作用下不变.
- 若 $a = 1, b \neq 0$: 在加法运算下, $\mathrm{order}(b) = p$. 仿射变换 g 可以写成 p^{k-1} 个不交的轮换 $(v, v + b, v + 2b, \dots, v + (p-1)b)$. 因此有 $C^{p^{k-1}}$ 个染色都在 g 的作用下不变.
- 若 $a \neq 1$: 那么 g 共轭于 $g' : x \mapsto ax$, 因为不难构造 $h : x \mapsto x + c$ 满足 $g = h^{-1}g'h$. 因此考虑 g 作用下不变的染色个数, 等价于考虑 g' 作用下不变的染色个数. 显然 0 是 g' 的一个不动点. 剩余的点 $\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 构成一个大小为 $M = |\mathbb{F}| - 1$ 循环群, 不妨记 α 是群的一个生成元. 那么存在唯一的 $t \in \{1, \dots, M-1\}$ 使得 $a = \alpha^t$.
  - 如果 $\gcd(t, M) = 1$, 那么 $a = \alpha^t$ 也是 $\mathbb{F}\setminus\{0\}$ 的一个生成元, 这样的 a 有 $\phi(M)$ 个. 这时置换 g' 可以分解成一个不动点 0 和剩余所有数上的轮换. 在 g' 作用下不变的染色数有 C^2 个.
  - 更一般的, 如果 $\gcd(t, M) = M/d$ 那么在乘法下 $\mathrm{order}(a) = d$, 这样的 a 有 $\phi(d)$ 个. 这时置换 g' 可以分解成一个不动点 0 和 M/d 个形如

    $$(v, av, a^2v, \dots, a^{d-1}v)$$

    的长度为 d 的轮换. 在 g' 作用下不变的染色数有 $C^{1+M/d}$ 个.

综上, 使用 Pólya/Burnside 计数可以得到总染色数为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\mathbb{F}|(|\mathbb{F}|-1)}\Big(C^{p^k} + \sum_{b\neq 0} C^{p^{k-1}} + \sum_{a\neq 1}\sum_{b} C^{1+M/\,\mathrm{order}(a)}\Big)\\ =&\frac{1}{|\mathbb{F}|(|\mathbb{F}|-1)}\Big(C^{p^k} + (p^k-1)C^{p^{k-1}} + \sum_{\substack{d\mid p^k-1\\ d\neq 1}} \phi(d)p^k C^{1+\frac{p^k-1}{d}}\Big)\end{aligned}$$

具体到 $|\mathbb{F}| = 7^5 = 2 \times 3 \times 2801 + 1$ 时:

- 对 $g(x) = x$, 不动点个数为 C^{16807}.
- 对 $g(x) = x + b$ $(b \neq 0)$, 该置换可分解为 $7^4 = 2401$ 个 7-轮换, 不动点个数 C^{2401}.
- 对 $g(x) = ax + b$ $(a \neq 1)$, 取 $h(x) = x + b\cdot(a-1)^{-1}$ 则 $h \circ g \circ h^{-1}(x) = ax$. 共轭置换的型相同, 只要考虑 $g'(x) = ax$ $(a \neq 1)$. 按照 a 在乘法群中的阶 $\mathrm{order}(a)$ 讨论:

order(a)	轮换个数 (包括 1-轮换)	不动点个数	对应 a ($a \neq 1$) 的个数
1	$2 \times 3 \times 2801 + 1$	$C^{16806+1}$	0
2	$3 \times 2801 + 1$	C^{8403+1}	1
3	$2 \times 2801 + 1$	C^{5602+1}	2
2×3	$2801 + 1$	C^{2801+1}	2
2801	$2 \times 3 + 1$	C^{6+1}	2800
2×2801	$3 + 1$	C^{3+1}	2800
3×2801	$2 + 1$	C^{2+1}	2×2800
$2 \times 3 \times 2801$	$1 + 1$	C^{1+1}	2×2800

非等价染色数为

$$\frac{C^{16807}}{16807 \times 16806} + \frac{C^{2401}}{16807} + \frac{C^{8404} + 2C^{5603} + 2C^{2802} + 2800C^7 + 2800C^4 + 5600C^3 + 5600C^2}{16806}.$$

5. (10 分) 考虑 n 个无差异点构成的圈, 每个点上可以标记 $C := \{0, 1, \ldots, C-1\}$ 中的一个整数, 经过旋转 (不包括镜面) 可重合的标号方式视为同一种. 选以下问题中的 2 个作答即可.

(1) 如果要求相邻两个点的奇偶性不同, 有多少种不同的标号方案? ($n = 30$, $C = 3$)

(2) 如果要求所有点标的和为偶数, 有多少种不同的标号方案? ($C = 3$, $n = p^2$ 为奇素数平方)

(3) 如果要求相邻两个点的标号不同, 有多少种不同的标号方案? ($n = 30$)

(4) 如果要求所有点的标号和为 $C-1$ 的倍数, 有多少种不同的标号方案? (n 为素数)

解 顺时针标记 n 个点为 $0, 1, \cdots, n-1 \in \mathbb{Z}_n$. 圈上所有旋转变换构成的群也是 $\mathbb{Z}_n$. 群作用就是 $\mathbb{Z}_n$ 上的加法.

一个旋转 $g \in \mathbb{Z}_n$ 对染色的 $f : \mathbb{Z}_n \to C$ 的作用为

$$(g \circ f)(x) = f(x - g).$$

由 Burnside 引理,

$$\text{非等价标号方案数} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \text{作用 } g \text{ 的满足条件的不动点个数}.$$

(1) 当 g 为奇数时一定没有不动点。只需考虑 $g = 2k$, 按照 $\gcd(2k, n)$ 的值讨论:

- $\gcd(2k, 30) = 2$ 时, 满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^2, 这样的 g 有 8 个.
- $\gcd(2k, 30) = 6$ 时, 满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^4, 这样的 g 有 4 个.
- $\gcd(2k, 30) = 10$ 时, 满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^6, 这样的 g 有 2 个.
- $\gcd(2k, 30) = 30$ 时, 满足相邻点奇偶性不同的不动点个数为 2^{16}, 这样的 g 有 1 个.

非等价方案数 $\frac{1}{30}\times(8\times 2^2+4\times 2^4+2\times 2^6+1\times 2^{16})=2192.$

(2) 轮换指数

$$P_G(z_1,\cdots,z_n)=\frac{1}{p^2}(z_1^{p^2}+(p-1)z_p^p+(p^2-p)z_{p^2}).$$

标记奇数标号为 x, 代入 $z_k=2+x^k$, 得到

$$A(x)=\frac{(2+x)^{p^2}+(p-1)(2+x^p)^p+(p^2-p)(2+x^{p^2})}{p^2}.$$

这是一个生成函数 $A(x)=\sum_i a_ix^i$, 其中 a_i 表示有 i 个奇数标号的非等价标号方案数. 题目所求的是所有偶数下标项 a_{2i} 的和.

偶数下标项的和等于 $\frac{A(1)+A(-1)}{2}$. 故非等价标号数为

$$\frac{3^{p^2}+1^{p^2}+(p-1)3^p+(p-1)1^p+(p^2-p)3+(p^2-p)1}{2p^2}=\frac{3^{p^2}+(p-1)3^p+4p^2-3p}{2p^2}.$$

(3) 不考虑旋转, 记长度为 n 的圈上相邻两点标号不同的标号方案数为 f_n. 那么

$$f_1=C,f_2=C(C-1),f_n=C(C-1)^{n-1}-f_{n-1}\ \forall n\geq 3.$$

展开 $f_n(n\geq 3)$ 有

$$f_n=C\sum_{k=1}^{n-1}(C-1)^{n-k}(-1)^{k+1}=(C-1)^n+(-1)^n(C-1).$$

由 Burnside 引理, 按照 $\gcd(g,n)$ 的值讨论作用 g 的不动点个数:

- $\gcd(g,n)=1$ 时, 满足条件的不动点个数为 0, 这样的 g 有 $\phi(n)$ 个.
- $\gcd(g,n)=m\neq 1$ 时, 满足条件的不动点个数为 f_m, 这样的 g 有 $\phi(\frac{n}{m})$ 个.

gcd	#合法不动点	# g
1	0	8
2	$(C-1)^2+(C-1)$	8
3	$(C-1)^3-(C-1)$	4
5	$(C-1)^5-(C-1)$	2
6	$(C-1)^6+(C-1)$	4
10	$(C-1)^{10}+(C-1)$	2
15	$(C-1)^{15}-(C-1)$	1
30	$(C-1)^{30}+(C-1)$	1

因此, 非等价标记方案数为

$$\frac{1}{30}(x^{30}+x^{15}+2x^{10}+4x^6+2x^5+4x^3+8x^2+8x),\text{ 其中}x=C-1.$$

(4) 类似 (2), 标记模 $C-1$ 余数为 a 的标号为 x^a, 那么 $z_k = 1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(C-1)k} = \frac{1-x^{Ck}}{1-x^k}$. 代入轮换指数 P_G 可得到染色数关于颜色和的生成函数 x

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{n}\left[\left(1+x+x^2+\cdots+x^{(C-1)}\right)^n + (n-1)\left(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{(C-1)n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1-x^C}{1-x}\right)^n + (n-1)\frac{1-x^{Cn}}{1-x^n}\right)
\end{aligned}$$

非等价标号方案数即所有 $x^{(C-1)k}(k \geq 0)$ 的系数和.

令 $1, \omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^{C-2}$ 是 $x^{C-1} = 1$ 的 n 个根. 那么

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=0}^{C-2} (\omega^i)^k = (C-1) \cdot \mathbb{1}_{C-1|k},$$

$$A(x) \text{ 中 } x^{(C-1)k}\ (k \geq 0) \text{ 的系数和} = \frac{1}{C-1}\sum_{i=0}^{C-2} A(\omega^i).$$

代入得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{C-2} A(\omega^i) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{C-2}\left(\sum_{k=0}^{C-2}(\omega^i)^k + 1\right)^n + \frac{(n-1)}{n}\sum_{i=0}^{C-2}\left(\sum_{k=1}^{C-2}(\omega^i)^{kn} + 2\right) \\
&= \frac{C^n + (C-2)\cdot 1^n}{n} + \frac{(n-1)}{n}\left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2}\sum_{i=0}^{C-2}(\omega^i)^{kn}\right) \\
&= \frac{C^n + C - 2}{n} + \frac{(n-1)}{n}\left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2}(C-1)\mathbb{1}_{C-1|kn}\right) \qquad (*) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n}[C^n + C - 2 + 2(n-1)(C-1) + (n-1)^2(C-1)], & \text{if } n \mid C-1 \\ \frac{1}{n}[C^n + C - 2 + 2(n-1)(C-1)], & \text{其他情况} \end{cases}
\end{aligned}$$

故

$$\text{非等价方案数} = \begin{cases} \frac{C^n - 1}{n(C-1)} + n, & \text{if } n \mid C-1 \\ \frac{C^n - C}{n(C-1)} + 2, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 (*) 处, 当 $C - 1 = qn$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{C-2} \mathbb{1}_{qn|kn} \\
&= \sum_{k=1}^{C-2} \mathbb{1}_{q|k} \quad (\text{因为 } n \text{ 为质数}) \\
&= \left\lfloor \frac{C-2}{q} \right\rfloor \quad (\text{相当于问 } 1\cdots, C-2 \text{ 中 } q \text{ 倍数的个数}) \\
&= \frac{C-1}{q} - 1 \\
&= n - 1.
\end{aligned}$$

(5) 类似 (2), 标记模 $C-1$ 余数为 a 的标号为 x^a, 那么 $z_k = 2 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(C-2)k}$. 代入轮换指数 P_G 可得到染色数关于颜色和的生成函数 x

$$A(x) = \frac{1}{n}\left[\left(2 + x + x^2 + \cdots + x^{(C-2)}\right)^n + (n-1)\left(2 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{(C-2)n}\right)\right].$$

非等价标号方案数即所有 $x^{(C-1)k} (k \geq 0)$ 的系数和.

设 $w_n^1, w_n^2, \cdots, w_n^n$ 是 $x^n = 1$ 的 n 个根. 那么

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{n} (w_n^i)^k = n \cdot \mathbb{1}_{n|k},$$

$$A(x) \text{ 中 } x^{(C-1)k}\ (k \geq 0) \text{ 的系数和} = \frac{1}{C-1}\sum_{i=1}^{C-1} A(w_{C-1}^i).$$

代入 $A(x)$ 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{C-1} A(\omega^i) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{C-1}\left(\sum_{k=1}^{C-2}\left(\omega^i\right)^k + 2\right)^n + \frac{(n-1)}{n}\sum_{i=1}^{C-1}\left(\sum_{k=1}^{C-2}\left(\omega^i\right)^{kn} + 2\right) \\
&= \frac{C^n + (C-2)\cdot 1^n}{n} + \frac{(n-1)}{n}\left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2}\left(\sum_{i=1}^{C-1}(\omega^i)^{kn}\right)\right) \qquad (*) \\
&= \frac{C^n + (C-2)}{n} + \frac{(n-1)}{n}\left(2(C-1) + \sum_{k=1}^{C-2}(C-1)\mathbb{1}_{C-1|kn}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1) + (n-1)^2(C-1)], & \text{if } n \mid C-1 \\ \frac{1}{n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1)], & \text{其他情况} \end{cases}
\end{aligned}$$

故

$$\text{非等价方案数} = \begin{cases} \frac{1}{(C-1)n}[C^n + (C-2) + 2(n-1)(C-1) + (n-1)^2(C-1)], & \text{if } C-1 = qn, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{n}[\frac{C^n-1}{C-1} + 2n - 1], & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注: 由 $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$,

$\forall w_n^{(i)} \neq 1, \sum_{k=0}^{n-1}\left(w_n^{(i)}\right)^k = 0$, 于是 (*) 式成立.

当 $C-1 = qn$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{C-2}\mathbb{1}[kn \mod qn = 0] \\
=&\sum_{k=1}^{C-2}\mathbb{1}[k \mod q = 0] \quad (\text{由 } n \text{ 为质数, 等号成立}) \\
=&\lfloor\frac{C-2}{q}\rfloor \quad (\text{相当于问 } 1\cdots, C-2 \text{ 中 } q \text{ 倍数的个数}) \\
=&\frac{C-1}{q} - 1 \\
=&n-1.
\end{aligned}$$