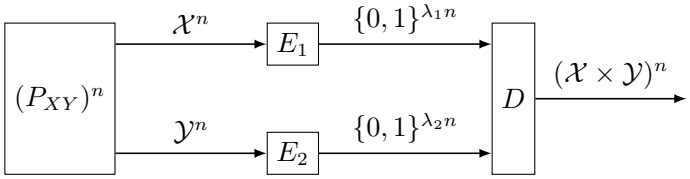
编码

参考答案

1. (10 分) 本题中, 信息熵 H 使用 2 作为底数. 令 P_{XY} 为一个支撑有限 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上的联合分布. 令常数 λ_1,λ_2 满足 $\lambda_1 > H(X|Y)$, $\lambda_2 > H(Y|X)$, $\lambda_1+\lambda_2 > H(X,Y)$.



(1) 请构造两个压缩函数 $E_1 : \mathcal{X}^n \to \{0,1\}^{\lfloor\lambda_1 n\rfloor}$, $E_2 : \mathcal{X}^n \to \{0,1\}^{\lfloor\lambda_2 n\rfloor}$, 和一个解压缩函数 $D : \{0,1\}^{\lfloor\lambda_1 n\rfloor+\lfloor\lambda_2 n\rfloor} \to (\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^n$, 并证明

$$\Pr_{((X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n))\sim(P_{XY})^n}\Big[D(E_1(X_1,\ldots,X_n),E_2(Y_1,\ldots,Y_n)) \neq ((X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n))\Big] \le 2^{-\Theta(n)}.$$

(2) 如果改变参数, 满足如下条件之一: a) $\lambda_1 < H(X|Y)$, b) $\lambda_2 < H(Y|X)$, c) $\lambda_1+\lambda_2 < H(X,Y)$. 说明这时不能构造满足前一问要求的压缩函数和解压缩函数.

解

(1) 随机选取 E_1,E_2, 然后我们证明 E_1,E_2 大概率是符合要求的压缩函数.

用 $X_{1:n},Y_{1:n}$ 分别表示 $(X_1,\ldots,X_n),(Y_1,\ldots,Y_n)$. 存在一个与 n 无关的实数 $\delta>0$ 使得 $\lambda_1 > H(X|Y)+2\delta$, $\lambda_2 > H(Y|X)+2\delta$, $\lambda_1+\lambda_2 > H(X,Y)+2\delta$. 根据 Chernoff bound（或 Sanov Theorem)

$$\begin{aligned}
\Pr[-\log(P_{XY}^n(X_{1:n},Y_{1:n})) \ge n(H(X,Y)+\delta)] &\le 2^{-\Theta(n)},\\
\Pr[-\log(P_{X|Y}^n(X_{1:n}|Y_{1:n})) \ge n(H(X|Y)+\delta)] &\le 2^{-\Theta(n)},\\
\Pr[-\log(P_{Y|X}^n(Y_{1:n}|X_{1:n})) \ge n(H(Y|X)+\delta)] &\le 2^{-\Theta(n)}.
\end{aligned}$$

据此我们定义集合 $\mathcal{D}_n$

$$\mathcal{D}_n := \left\{ (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \middle| \begin{array}{l}
\sum_{i=1}^n -\log(P_{XY}(x_i,y_i)) = -\log(P_{XY}^n(x_{1:n},y_{1:n})) \le n(H(X,Y)+\delta)\\
\sum_{i=1}^n -\log(P_{X|Y}(x_i|y_i)) = -\log(P_{X|Y}^n(x_{1:n}|y_{1:n})) \le n(H(X|Y)+\delta)\\
\sum_{i=1}^n -\log(P_{Y|X}(y_i|x_i)) = -\log(P_{Y|X}^n(y_{1:n}|x_{1:n})) \le n(H(Y|X)+\delta)
\end{array} \right\}$$

从 P_{XY}^n 中采样得到的 $X_{1:n},Y_{1:n}$ 以 $1-2^{\Theta(n)}$ 的概率落在 $\mathcal{D}_n$ 当中. 我们定义解压缩函数 D 为

$$D(c_1,c_2) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \text{ 如果存在唯一的} (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\in\mathcal{D}_n \text{ 满足} E_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1 \wedge E_2(y_1,\ldots,y_n)=c_2.$$

这个解压缩函数并不是最优的, 但是方便分析.

对于任何 $(x_{1:n}, y_{1:n}) \in \mathcal{D}_n$, 其可以正确被解压, 即 $D(E_1((x_{1:n}), E_2(y_{1:n}))) = (x_{1:n}, y_{1:n})$, 当且仅当没有另一个 $(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n$ 被编码到同样的 (c_1, c_2). 这个概率（随机性来源于 E_1, E_2）可以用 union bound 估计

$$
\begin{aligned}
&\Pr[D(E_1((x_{1:n}), E_2(y_{1:n}))) \neq (x_{1:n}, y_{1:n})] \\
\leq &\sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ (x'_{1:n}, y'_{1:n}) \neq (x_{1:n}, y_{1:n})}} \Pr[(E_1(x'_{1:n}), E_2(y'_{1:n})) = (E_1(x_{1:n}), E_2(y_{1:n}))] \\
= &\sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} \Pr[(E_1(x'_{1:n}), E_2(y'_{1:n})) = (E_1(x_{1:n}), E_2(y_{1:n}))] \\
&+ \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} = x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} \Pr[E_2(y'_{1:n}) = E_2(y_{1:n})] + \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} = y_{1:n}}} \Pr[E_1(x'_{1:n}) = E_1(x_{1:n})] \\
= &\sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} 2^{-(\lambda_1+\lambda_2)n} + \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} = x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} 2^{-\lambda_2 n} + \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} = y_{1:n}}} 2^{-\lambda_1 n}.
\end{aligned}
$$

注意到, $\mathcal{D}_n$ 的大小不是很大. 每一个 $(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n$ 都满足

$$
P^n_{XY}(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \geq 2^{-n(H(X,Y)+\delta)}.
$$

它们的概率之和小于等于 1, 因此 $|\mathcal{D}_n| \leq 2^{n(H(X,Y)+\delta)}$. 类似地, 集合

$$
\left\{ y'_{1:n} \;\middle|\; (x_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \right\}
$$

的大小也不是很大. 其中的每一个 $y'_{1:n}$ 都满足

$$
P^n_{Y|X}(y'_{1:n}|x_{1:n}) \geq 2^{-n(H(Y|X)+\delta)}.
$$

因为概率只和不超过 1, 所以满足条件的 $y'_{1:n}$ 不超过 $2^{n(H(Y|X)+\delta)}$ 个. 对称地, 集合

$$
\left\{ x'_{1:n} \;\middle|\; (x'_{1:n}, y_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \right\}
$$

的大小不超过 $2^{n(H(X|Y)+\delta)}$. 回到之前 union bound 的估计,

$$
\begin{aligned}
&\Pr[D(E_1((x_{1:n}), E_2(y_{1:n}))) \neq (x_{1:n}, y_{1:n})] \\
= &\sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} 2^{-(\lambda_1+\lambda_2)n} + \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} = x_{1:n} \wedge y'_{1:n} \neq y_{1:n}}} 2^{-\lambda_2 n} + \sum_{\substack{(x'_{1:n}, y'_{1:n}) \in \mathcal{D}_n \\ x'_{1:n} \neq x_{1:n} \wedge y'_{1:n} = y_{1:n}}} 2^{-\lambda_1 n} \\
\leq &\, 2^{n(H(X,Y)+\delta)-(\lambda_1+\lambda_2)n} + 2^{-n(H(Y|X)+\delta)-\lambda_2 n} + 2^{n(H(X|Y)+\delta)-\lambda_1 n} \\
\leq &\, 3 \cdot 2^{-\delta n}.
\end{aligned}
$$

综合上面几条, 正确解压缩的概率很高

$$\begin{aligned}&\Pr_{(X_{1:n},Y_{1:n})\sim(P_{XY})^n}\Big[D(E_1(X_{1:n}),E_2(Y_{1:n}))=(X_{1:n},Y_{1:n})\Big]\\&=\Pr_{(X_{1:n},Y_{1:n})\sim(P_{XY})^n}\Big[D(E_1(X_{1:n}),E_2(Y_{1:n}))=(X_{1:n},Y_{1:n})\;\Big|\;(X_{1:n},Y_{1:n})\in\mathcal{D}_n\Big]\Pr[(X_{1:n},Y_{1:n})\in\mathcal{D}_n]\\&\qquad\geq(1-2^{-\Theta(n)})(1-2^{-\Theta(n)})=1-2^{-\Theta(n)}.\end{aligned}$$

(2) 如果 $\lambda_1+\lambda_2<H(X,Y)$, 一定不存在压缩函数 E_1,E_2 和解压缩函数 D 能大概率正确解压缩. 因为否则 E_1,E_2 可以合并成一个 P_{XY}^n 的压缩函数 $E:(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})^n\to\{0,1\}^{(\lambda_1+\lambda_2)n}$, 可以被 D 大概率正确解压. 而我们知道这样的压缩函数是不存在的.

如果 $\lambda_1<H(X|Y)$, 一定不存在压缩函数 E_1,E_2 和解压缩函数 D 能大概率正确解压缩. 因为否则 E_1 就是一个压缩函数, 可以被 E_2,D 合并成的一个利用旁信息的解压缩函数 D' : $\mathcal{Y}^n\times\{0,1\}^{\lambda_1 n}\to\mathcal{X}^n$ 大概率正确解压缩. 而我们知道, 即使利用旁信息, 也不可能把 P_X^n 压缩到 $n(H(X|Y)-\delta)$ 比特以内.

2. (10 分) $[\ell,n,d]$-纠错码可以由其编码函数 $E:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^\ell$ 定义, 满足

$$\forall\text{distinct } x,y\in\{0,1\}^n,\ \Delta(E(x),E(y))\geq d.$$

这里 Δ 表示汉明距离 (Hamming distance).

(1) 证明存在常数 α. 当 $\ell>2d$ 且 $\ell\geq 2n+\alpha d\ln(\ell/d)$ 时, 存在 $[\ell,n,d]$-纠错码.
提示: 可以使用不等式 $\frac{\log p\cdot\log(1-p)}{\log e}\leq h(p)\leq\frac{\log p\cdot\log(1-p)}{\log 2}$. 其中 $h(p)$ 表示 $\mathrm{Bern}(p)$ 的熵.

(2) 证明存在常数 α. 当 $\ell>2d$ 且 $\ell\geq n+\alpha d\ln(\ell/d)$ 时, 存在 $[\ell,n,d]$-纠错码.

解

(1) 随机选取一个映射 E. 定义 $C_x=E(x)$, 这样 C_x ($x\in\{0,1\}^n$) 是相互独立的随机变量. 对任意不同的 $x,y\in\{0,1\}^n$

$$\Pr\Big[\Delta(C_x,C_y)\leq d\Big]=\Pr_{Z\sim\mathrm{Binom}(\ell,\frac12)}\Big[Z\leq d\Big]\leq\exp\Big(-\ell\cdot D\Big(\frac{d}{\ell}\;\Big\|\;\frac12\Big)\Big).$$

根据提示中的不等式,

$$\begin{aligned}D\Big(\frac{d}{\ell}\;\Big\|\;\frac12\Big)=\log 2-h\Big(\frac{d}{\ell}\Big)&\geq\log 2-\frac{\log(\frac{d}{\ell})\cdot\log(1-\frac{d}{\ell})}{\log 2}\\&=\log 2+\log_2(\tfrac{\ell}{d})\cdot\log(1-\tfrac{d}{\ell})\geq\log 2-2\log 2\cdot\frac{d}{\ell}\log_2(\tfrac{\ell}{d}).\end{aligned}$$

其中还利用了 $\log(1-p)\geq-2\log 2\cdot p$ 对任何 $p\in[0,\frac12]$. 因此

$$\Pr\Big[\Delta(C_x,C_y)\leq d\Big]\leq 2^{-\ell+4k\log_2(\frac{\ell}{d})}.$$

根据 union bound,

$$\Pr\Big[\exists\text{distinct } x,y,\Delta(C_x,C_y)\leq d\Big]<2^{2n}\cdot 2^{-\ell+2d\log_2(\frac{\ell}{d})}.$$

只要 $\ell \geq 2n + 2d\log_2(\frac{\ell}{d})$, 这个概率便严格小于 1. 说明存在 $[\ell, n, d]$-纠错码.

(2) 随机选取一个线性映射 $E : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^\ell$. 仍然定义 $C_x = E(x)$, 这样 C_x ($x \in \{0,1\}^n$) 是两两独立的随机变量. 仍有对任意不同的 $x, y \in \{0,1\}^n$

$$\Pr\Big[\Delta(C_x, C_y) \leq d\Big] \leq 2^{-\ell+2d\log_2(\frac{\ell}{d})}.$$

对于任意 x, y, 考虑 $z = x \oplus y$, 因为 E 是线性映射

$$\Delta(C_x, C_y) = \|E(x) \oplus E(y)\|_1 = \|E(z)\|_1 = \|E(z) \oplus E(0)\|_1 = \Delta(C_z, C_0).$$

这说明, 任意两个编码见的汉明距离大, 等价于零的编码与任何非零的编码之间的汉明距离大.

$$\Pr\Big[\exists\text{distinct } x, y, \Delta(C_x, C_y) \leq d\Big] = \Pr\Big[\exists z \neq 0, \Delta(C_z, C_0) \leq d\Big] < 2^n \cdot 2^{-\ell+2d\log_2(\frac{\ell}{d})}.$$

只要 $\ell \geq n + 2d\log_2(\frac{\ell}{d})$, 这个概率便严格小于 1. 说明存在 $[\ell, n, d]$-纠错码.

3. (5 分) $[\ell, n, d]_p$-纠错码可以由其编码函数 $E : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Z}_p^\ell$ 定义, 满足

$$\forall\text{distinct } x, y \in \mathbb{Z}_p^n,\ \Delta(E(x), E(y)) \geq d.$$

这里 Δ 表示汉明距离 (Hamming distance).

(1) (0 分) 证明当 p 为素数幂且 $p \geq \ell$ 时, 存在 $[\ell, n, \ell - n + 1]_p$-纠错码.

(2) 证明当 $n + d > \ell + 1$ 时, 不存在 $[\ell, n, d]_p$-纠错码.

解

(1) Reed-Solomon Code 即满足要求.

编码函数为, 首先定义 $\mathbb{F}_p$ 上多项式 $f_x(z) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i z^i$,

$$E(x) = (f_x(0), f_x(1), \ldots, f_x(\ell - 1))$$

其中将 $0, \ldots, \ell - 1$ 解读为 $\mathbb{F}_p$ 上的 ℓ 个互异元素. 两个不同的 $n-1$ 次多项式至多在 $n-1$ 个位置相等.

(2) 反证法: 假设存在 $[\ell, n, \ell - n + 2]_p$-纠错码.

只关注每个 codeword 的前 $n-1$ 位. 根据鸽笼原理, 一定有某两个 codeword 的前 $n-1$ 位相同, 那么它们至多在 $\ell - n + 1$ 个位置不同. 这与距离至少为 $\ell - n + 1$ 的条件矛盾.

4. (15 分) 在有限空间 Ω 上有两个分布 P, Q. 区分器 $\mathcal{D}$ 是一个输入域为 Ω, 输出域为 $\{0,1\}$ 的算法 (更准确地说, 是 kernel). 我们希望让伪阳性概率 ε_{FP} 和伪阴性概率 ε_{FN} 尽量小.

$$\varepsilon_{\text{FP}} = \Pr_{X \sim P}[\mathcal{D}(X) \to 1], \qquad \varepsilon_{\text{FN}} = \Pr_{X \sim Q}[\mathcal{D}(X) \to 0].$$

(1) 定义 likelihood ratio 为 $L:\Omega\to[-\infty,+\infty]$, $L(x)=\log(\frac{Q(x)}{P(x)})$.

证明: 对任何区分器 $\mathcal{D}$, 存在算法 $\mathcal{D}':[-\infty,+\infty]\to\{0,1\}$, 使得

$$\Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}(X)\to 1]=\Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}'(L(X))\to 1],\qquad \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}(X)\to 0]=\Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}'(L(X))\to 0].$$

(2) 证明: 为了最小化 $\varepsilon_{\mathrm{FP}},\varepsilon_{\mathrm{FN}}$, 只须考虑如下的 likelihood ratio test 区分器 $\mathcal{D}_{\tau,\theta}$

$$\mathcal{D}_{\tau,\theta}(x)=\begin{cases}1, & \text{if } L(x)>\tau\\ \mathrm{Bern}(\theta), & \text{if } L(x)=\tau\\ 0, & \text{if } L(x)<\tau\end{cases}$$

(3) 改为区分 P^n 和 Q^n. 这时区分器是输入域为 Ω^n, 输出域为 $\{0,1\}$ 的算法. 随着 n 的增长, 是否可以让 $\varepsilon_{\mathrm{FP}},\varepsilon_{\mathrm{FN}}$ 分别以 $\exp(-n\alpha),\exp(-n\beta)$ 的速度趋近于 0?

具体来说, 请确定以下区域的边界

$$\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2\;\middle|\;\text{对任意充分大的 } n\text{, 存在区分器 }\mathcal{D}\text{, 同时满足}\begin{matrix}\Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}(X)\to 1]\le\exp(-n\alpha)\\ \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}(X)\to 0]\le\exp(-n\beta)\end{matrix}\right\}$$

为了统一记号, 对任意 $\lambda\in[0,1]$, 定义分布 P_λ 为 $P_\lambda(x)\propto(P(x))^{1-\lambda}(Q(x))^\lambda$.

提示: 上次作业第 2 题.

解

(1) 用随机变量 X 表示从 P 或 Q 的采样. 定义随机变量 $Y=L(X)$. 这样就得到了两个联合分布 P_{XY},Q_{XY}. 根据 Y 的定义, 有一个 (退化的) kernel $P_{Y|X}$ 满足 $P_{XY}=P_XP_{Y|X}$, $Q_{XY}=Q_XP_{Y|X}$. 同样根据 Y 的定义, 对任意 x s.t. $y=L(x)\in(-\infty,+\infty)$,

$$P_{x|y}(x|y)=\frac{P(x)}{\sum\limits_{x'\text{ s.t. }L(x')=y}P(x')}=\frac{e^yP(x)}{\sum\limits_{x'\text{ s.t. }L(x')=y}e^yP(x')}=\frac{Q(x)}{\sum\limits_{x'\text{ s.t. }L(x')=y}Q(x')}=Q_{x|y}(x|y)$$

因此可以定义 kernel $P_{X|Y}$ 使得 $P_{XY}=P_YP_{X|Y}$, $Q_{XY}=Q_YP_{X|Y}$.

令 $\mathcal{D}'(y)$ 首先从条件分布 $P_{X|Y=y}$ 采样 x, 再输出 $\mathcal{D}(x)$ 的结果. 这样当 y 采样自 P_Y (resp. Q_Y) 时, x 的分布服从 P_X (resp. Q_X). 便证明了题目.

区分从 P 或 Q 采样的随机变量 X 时, 能从 X 中计算出的量都被称为是统计量. 例如这里定义的 Y 就是一个统计量. 而额外满足 $P_{XY}=P_YP_{X|Y}$, $Q_{XY}=Q_YP_{X|Y}$ 的统计量被称为充分统计量 (sufficient statistic), 因为它已经包括了区分 P,Q 的所有有用信息.

因此, 我们不妨改为区分 P_Y,Q_Y. 等价地, 不妨假设 $x=L(x)=\log\frac{Q(x)}{P(x)}$.

(2) 假设 $\mathcal{D}$ 不是 LRT 区分器, 那么存在 $\alpha>\beta$ 使得

$$Q(\alpha)>0,\qquad P(\beta)>0,$$
$$\Pr[\mathcal{D}(\alpha)\to 1]<1,\qquad \Pr[\mathcal{D}(\beta)\to 1]>0.$$

我们构造一个严格优于 $\mathcal{D}$ 的区分器 $\mathcal{D}'$. 选择一个充分小的 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\Pr[\mathcal{D}'(x) \to 1] = \begin{cases} \Pr[\mathcal{D}(\alpha) \to 1] + \varepsilon P(\beta), & \text{if } x = \alpha \\ \Pr[\mathcal{D}(\beta) \to 1] - \varepsilon P(\alpha), & \text{if } x = \beta \\ \Pr[\mathcal{D}(x) \to 1], & \text{otherwise} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}'(x) \to 1] &= \Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}(x) \to 1] + P(\alpha)\varepsilon P(\beta) - P(\beta)\varepsilon P(\alpha) = \Pr_{X\sim P}[\mathcal{D}(x) \to 1]. \\ \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}'(x) \to 1] &= \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}(x) \to 1] + Q(\alpha)\varepsilon P(\beta) - Q(\beta)\varepsilon P(\alpha) \\ &= \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}(x) \to 1] + Q(\alpha)\varepsilon P(\beta) - e^{\beta}P(\beta)\varepsilon e^{-\alpha}Q(\alpha) > \Pr_{X\sim Q}[\mathcal{D}(x) \to 1]. \end{aligned}$$

也就是说, $\mathcal{D}'$ 在不改变 $\varepsilon_{\mathrm{FP}}$ 的同时改善了 $\varepsilon_{\mathrm{FN}}$.

(3) 因为已经证明 LRT 是最好的区分器, 只需考虑以下区分器的错误概率: $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ iff $\sum_i x_i > n\tau$, 其中 τ 是任意阈值. 这时

$$\varepsilon_{\mathrm{FP}} = \Pr_{X^n\sim P^n}\Big[\sum_i X_i > n\tau\Big], \qquad \varepsilon_{\mathrm{FN}} = \Pr_{X^n\sim Q^n}\Big[\sum_i X_i \le n\tau\Big].$$

为了让错误概率不逼近 1, 阈值 τ 必须满足

$$\mathop{\mathbb{E}}_{X\sim P}[X] \le \tau \le \mathop{\mathbb{E}}_{X\sim Q}[X]. \tag{*}$$

根据上次作业, 我们可以用 Chernoff bound 证明

$$\varepsilon_{\mathrm{FP}} = \Pr_{X^n\sim P^n}\Big[\sum_i X_i > n\tau\Big] \le \exp(-nD(P^*\|P)).$$

这里 $P^*(x) \propto \exp(\lambda x)P(x)$, 其中的参数 λ 由 $\mathbb{E}_{X\sim P^*}[X] = \tau$ 唯一确定. 注意到

$$P^*(x) \propto \exp(\lambda x)P(x) = \Big(\frac{Q(x)}{P(x)}\Big)^{\lambda}P(x) = Q(x)^{\lambda}P(x)^{1-\lambda}.$$

所以 $P^* = P_\lambda$, 其中 λ 由 $\mathbb{E}_{X\sim P_\lambda}[X] = \tau$ 确定. 因为 $\mathbb{E}_{X\sim P_\lambda}[X]$ 随 τ 单调增长, 且 τ 的取值在 (*) 中, 所以 $\lambda \in [0, 1]$.

对称地, $\varepsilon_{\mathrm{FN}} \le \exp(-nD(P_\lambda\|Q))$, 其中 λ 由 $\mathbb{E}_{X\sim P_\lambda}[X] = \tau$ 确定.

对于任意 $\lambda \in [0, 1]$, 区分器 $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ iff $\sum_i x_i > n\,\mathbb{E}_{X\sim P_\lambda}[X]$ 可以实现

$$\varepsilon_{\mathrm{FP}} = \exp(-nD(P_\lambda\|P)), \qquad \varepsilon_{\mathrm{FN}} = \exp(-nD(P_\lambda\|Q)).$$

因此题目所求区域一定包含了曲线 $(D(P_\lambda\|P), D(P_\lambda\|Q))_{\lambda\in(0,1)}$ 之下的部分.

同时, 根据前几问, 我们知道 LRT 是最优的. 根据上次作业, 我们知道 Chernoff bound 是足够紧的. 因此曲线 $(D(P_\lambda\|P), D(P_\lambda\|Q))_{\lambda\in(0,1)}$ 是题目所求区域的边界.