

马尔可夫链

请在 12 月 18 日课前提交纸质作业.

1. (6 分) 考虑一个有限状态空间 Ω 上不可约的 (irreducible) 马尔可夫核 P . 我们知道 P 存在唯一的稳态分布 (stationary distribution) π . 证明对于任意初始分布 μ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu P^j = \pi.$$

2. (4 分) 考虑大小为 n 的有限状态空间 Ω 上的一个不可约 (irreducible) 马尔可夫核 P , 令 π 是稳态分布.

(1) 证明 P 只有一个特征值等于 1.

(2) 假设 P 有周期 $T > 1$. 这里 $T = \gcd\{t : \exists x, P^t(x|x) > 0\}$. 不难证明, 周期性说明状态空间可以划分为 T 个非空子集 $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{T-1}$ 满足

$$\forall x, y \in \Omega, \forall j \in \mathbb{Z}_T, P(y|x) > 0 \wedge x \in \Omega_j \implies y \in \Omega_{j+1}.$$

证明 1 的所有 T 次根 $e^{2\pi i \frac{k}{T}}$ (for $k \in \mathbb{Z}_T$) 都是 P 的特征值.

3. (6 分) 考虑 \mathbb{Z} 上的随机游走. 马尔可夫核是

$$P(x+1|x) = p, \quad P(x-1|x) = 1-p$$

其中 $p \in (0, 1)$ 是参数. 请计算这个马尔可夫链返回初始点的概率.

$$\Pr[\exists i > 0 \text{ such that } X_i = X_0].$$

4. (6 分) 考虑 \mathbb{Z}^d 上的随机游走. 马尔可夫核是

$$P(y_1, \dots, y_d | x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} 1/3^d, & \text{if } \forall i, |y_i - x_i| \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

这个马尔可夫核在各个维度上独立, 便于分析. 证明

$$\Pr[\exists i > 0 \text{ such that } X_i = X_0] = \begin{cases} 1, & \text{if } d = 2 \\ 1 - \Omega(1), & \text{if } d > 2 \end{cases}$$

提示: 考虑

$$\mathbb{E}[\text{number of } i > 0 \text{ such that } X_i = X_0].$$

5. (5 分) 对一个马尔可夫链 P , 用 π 表示它的一个稳态分布, 用 $\tau(\varepsilon)$ 表示它的混合时间.

$$\begin{aligned}\tau(\varepsilon) &= \text{smallest } t \text{ s.t. } d(t) \leq \varepsilon \\ d(t) &= \max_x \Delta_{\text{TV}}(P^t(x, \cdot), \pi)\end{aligned}$$

证明, 对任意 $\varepsilon > 0$, $\tau(2\varepsilon^2) \leq 2\tau(\varepsilon)$.

6. (10 分) 简单图 G 中有 n 个点, 最大度数记为 Δ . 用 $C > 5\Delta$ 种颜色对 G 随机点染色, 要求任意一对相邻点的染色不同. 为了均匀采样一个随机染色, 我们使用 MCMC 方法. 马尔可夫核是:

- 假设当前染色为 $f : V \rightarrow C$.
- 随机选取一个点 $v \in C$, 随机选取一个颜色 $c \in C$.
- 如果 v 的邻居的颜色都不是 c , 就将 v 的染色修改为 c ; 否则保持染色不变.

请估算混合时间 $\tau(\varepsilon)$, 给出一个尽量好的上界.

$$\begin{aligned}\tau(\varepsilon) &= \text{smallest } t \text{ s.t. } d(t) \leq \varepsilon \\ d(t) &= \max_{\mu} \Delta_{\text{TV}}(\mu P^t, \pi)\end{aligned}$$

注. 如果想用 *coupling* 分析 $C > 2\Delta$ 的情形, 建议用 $S_t \subseteq V$ 表示 t 时刻 *coupling* 中两个染色一致的点集. 考虑被 S_t 切的边 (一个端点在 S_t 中, 另一个端点在 S_t 外) 有怎样的影响.

注. 马尔可夫链可以优化为“随机选取一个 v 的邻居中未出现的颜色 $c \in C$ ”.