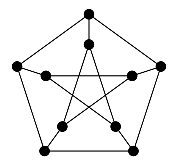
图论

参考答案

1. (15 分) 使用连通平面图的欧拉公式, 证明以下命题.

   (1) 若简单图 G 是一个平面图, 那么 $|E| \leq 3n - 6$.

   注. *k-quasi-planar* 是指可以把图绘制在平面上, 使得其中不存在 k 个两两相交的边. 平面图便是 2-*quasi-planar*. 尚未被证明的猜想: 任何 *k-quasi-planar* 图中至多有 $O_k(n)$ 条边.

   (2) Petersen 图不是平面图.

   (3) 平面图中, 存在一个度数不超过 3 的点或存在一个边数不超过 3 的面.

解

(1) 每个面邻至少 3 条边, 每个边临 2 个面. 所以 $3f \leq 2|E|$.

根据欧拉公式 $3|V| - 3|E| + 3f = 6$. 结合起来, $|E| \leq 3|V| - 6$.

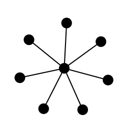
(2) Petersen 图有 10 顶点和 15 条边. 如果是平面图, 根据欧拉公式, $f = 7$.

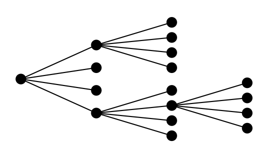
另一方面, 如果是平面图, 每个面都至少是五条边. 所以 $5f \leq 2|E|$, 得到 $f \leq 6$.

(3) 给每个点赋权重 1, 每条边赋权重 -1, 每个面赋权重 1. 根据欧拉公式, 总权重为正值.

然后把每条边的权重都均等地分散到相邻的两个点和两个面, 各得 $-1/4$. 由于总权重不变, 仍为正值, 所以一定有某个点或某个面的权重是正值. 如果一个点权重为正值, 说明这个点的度数不超过 3. 如果一个面权重为正值, 说明这个面的边数不超过 3.

2. (10 分) 求以下图中, 邻接矩阵的最大特征值 μ_1.

   (1) $d+1$ 个点的星 (star).

   (2) 任意 d 叉树. 只需证明 $\mu_1 \leq 2\sqrt{d}$.

解

(1) 考虑 A^2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

容易解得 A^2 的特征值为: d (2 重), 0 ($d-1$ 重). 所以 $\mu_1 = \sqrt{d}$.

(2) 设 μ_1 的特征向量为 θ. 易知 θ 中所有位符号相同, 不妨设所有位均为正值.

用 α_i 表示第 i 层点中 θ 的上界. 设 i^* 令 $\alpha_i d^{i/2}$ 取到最大值.

$$\alpha_i = \max_{\text{第 } i \text{ 层的点 } u} \theta(u) \qquad i^* = \operatorname*{argmax}_i \alpha_i d^{i/2}.$$

根据定义, 有第 i^* 层点 u 满足 $\theta(u) = \alpha_{i^*}$.

$$\mu_1 = \frac{(A\theta)(u)}{\theta(u)} = \frac{\theta(u \text{ 的亲节点}) + \sum_{u \text{ 的子节点}} \theta(v)}{\alpha_{i^*}} \le \frac{\alpha_{i^*-1} + d\alpha_{i^*+1}}{\alpha_{i^*}} \le \frac{\sqrt{d}\alpha_{i^*} + \sqrt{d}\alpha_{i^*}}{\alpha_{i^*}} = 2\sqrt{d}.$$

3. (10 分) 一个有限群 G 与集合 $S \subseteq G$ 定义了 Cayley 图. 在 $\mathrm{Cayley}(G,S)$ 中: 点集为 G; 边集包括 (a,b) 当且仅当 $a/b \in S$. 如果只考虑无向对称图, 我们要求 S 不包含幺元且对求逆封闭 ($g \in S \implies g^{-1} \in S$).

举例来说, n-维超立方体可以表示为 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_2^n, \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\})$; 环就是 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_n, \{-1,1\})$; K_n 就是 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})$.

(1) G 是 Abel 群, 请找到 $\mathrm{Cayley}(G,S)$ 的邻接矩阵或 Laplacian 矩阵的一组特征向量基及所有特征值.

(2) $G = \mathbb{Z}_p$, $S = \mathbb{QR}_p = \{u^2 \mid u \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}$ 是所有二次剩余. 额外要求素数 $p \equiv 1 \mod 4$ 以确保 $-1 \in S$. 证明 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ 邻接矩阵的特征值中, 除了 $\mu_1 = \frac{p-1}{2}$, 其余特征值均为 $O(\sqrt{p})$.

注. *这说明 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ (将所有边权重设为 2) 可以看作完全图的一个较好近似.*

提示: 考虑勒让德符号 (Legendre symbol). 注意到其满足同态性 $(\frac{x}{p})(\frac{y}{p}) = (\frac{xy}{p})$.

$$\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ 是二次剩余} \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -1, & \text{if } x \text{ 是非二次剩余} \end{cases}$$

并定义矩阵 $X(a,b) = (\frac{a-b}{p})$. 这样 $\mathrm{Cayley}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ 的邻接矩阵就可以表示为

$$A = \frac{1}{2}(J - I + X).$$

其中 J 表示所有位均为 1 的矩阵.

提示:

解

(1) 有限 Abel 群上的所有 character χ 即为一组特征向量基. 其对应的邻接矩阵特征值为 $\sum_{a\in S}\chi(a)$, 因为

$$(A\chi)(x) = \sum_{a\in S}\chi(a+x) = \sum_{a\in S}\chi(a)\chi(x).$$

如果考虑 Laplacian 矩阵, 则对应特征值为 $|S| - \sum_{a\in S}\chi(a)$.

(2) 根据提示, 先证明 $X^2 = pI - J$。易证 X 对角线上的元素等于 $p-1$. 难点是说明非对角线上元素均为 -1.

对任意 $a \neq b$

$$
\begin{aligned}
(X^2)(a,b) = \sum_x X(a,x)X(x,b) &= \sum_x \left(\frac{x-a}{p}\right)\left(\frac{x-b}{p}\right) = \sum_x \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+(a-b)}{p}\right) \\
&\text{注意到 } x \neq 0 \text{ 时 } (\tfrac{x}{p}) = (\tfrac{x^{-1}}{p}) \\
&= \sum_{x\neq 0}\left(\frac{x^{-1}}{p}\right)\left(\frac{x+(a-b)}{p}\right) = \sum_{x\neq 0}\left(\frac{1+(a-b)x^{-1}}{p}\right) = \sum_{x\neq 0}\left(\frac{1+x}{p}\right) \\
&= \underbrace{\sum_x \left(\frac{x}{p}\right)}_{=0} - \left(\frac{1}{p}\right) = -1.
\end{aligned}
$$

这样，我们有

$$
\begin{aligned}
2A &= J - I + X \\
4A^2 &= J^2 + I^2 + X^2 + \overbrace{JX + XJ}^{=0} - 2X - 2J \\
&= pJ + I + pI - J - 2X - 2J \\
4A^2 + 4A &= (p-1)I + (p-1)J. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

对于任何 $\mu \in \{\mu_2, \ldots, \mu_p\}$, 令 θ 为对应的特征向量. 在 (*) 两侧同乘 θ

$$(4\mu^2 + 4\mu)\theta = (4A^2 + 4A)\theta = (p-1)I\theta + (p-1)\underbrace{J\theta}_{=0}.$$

得到 $(2\mu+1)^2 = p$. 所以 $\mu = \frac{-1\pm\sqrt{p}}{2}$.