图论

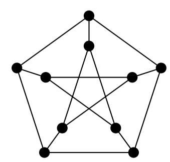
请在 12 月 25 日课前提交纸质作业.

1. (15 分) 使用连通平面图的欧拉公式, 证明以下命题.

   (1) 若简单图 G 是一个平面图, 那么 $|E| \le 3n-6$.

   注. *k-quasi-planar 是指可以把图绘制在平面上, 使得其中不存在 k 个两两相交的边. 平面图便是 2-quasi-planar. 尚未被证明的猜想: 任何 k-quasi-planar 图中至多有 $O_k(n)$ 条边.*

   (2) Petersen 图不是平面图.

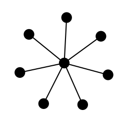
   

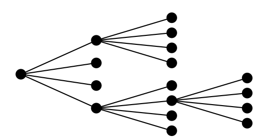
   (3) 平面图中, 存在一个度数不超过 3 的点或存在一个边数不超过 3 的面.

2. (10 分) 求以下图中, 邻接矩阵的最大特征值 μ_1.

   (1) $d+1$ 个点的星 (star).

   (2) 任意 d 叉树. 只需证明 $\mu_1 \le 2\sqrt{d}$.

3. (10 分) 一个有限群 G 与集合 $S \subseteq G$ 定义了 Cayley 图. 在 Cayley(G,S) 中: 点集为 G; 边集包括 (a,b) 当且仅当 $a/b \in S$. 如果只考虑无向对称图, 我们要求 S 不包含幺元且对求逆封闭 $(g \in S \implies g^{-1} \in S)$.

   举例来说, n-维超立方体可以表示为 Cayley$(\mathbb{Z}_2^n, \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\})$; 环就是 Cayley$(\mathbb{Z}_n, \{-1,1\})$; K_n 就是 Cayley$(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})$.

   (1) G 是 Abel 群, 请找到 Cayley(G,S) 的邻接矩阵或 Laplacian 矩阵的一组特征向量基及所有特征值.

   (2) $G=\mathbb{Z}_p$, $S=\mathbb{QR}_p=\{u^2 \mid u \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}\}$ 是所有二次剩余. 额外要求素数 $p \equiv 1 \mod 4$ 以确保 $-1 \in S$. 证明 Cayley$(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ 邻接矩阵的特征值中, 除了 $\mu_1 = \frac{p-1}{2}$, 其余特征值均为 $O(\sqrt{p})$.

   注. *这说明 Cayley$(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ (将所有边权重设为 2) 可以看作完全图的一个较好近似.*

   提示: 考虑勒让德符号 (Legendre symbol). 注意到其满足同态性 $(\frac{x}{p})(\frac{y}{p}) = (\frac{xy}{p})$.

$$\left(\frac{x}{p}\right) = x^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ 是二次剩余} \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ -1, & \text{if } x \text{ 是非二次剩余} \end{cases}$$

   并定义矩阵 $X(a,b) = (\frac{a-b}{p})$. 这样 Cayley$(\mathbb{Z}_p, \mathbb{QR}_p)$ 的邻接矩阵就可以表示为

$$A = \frac{1}{2}(J - I + X).$$

   其中 J 表示所有位均为 1 的矩阵.

   提示: