概率方法

不提交.

1. (10 分) 随机图 $G(n,p)$ 是连通的概率是多少?
   (1) 证明存在常数 $\alpha>0$, 使得对所有充分大的 n, $G(n,\alpha\ln n/n)$ 是连通图的概率不高于 $1/n$.
   (2) 证明存在常数 $\alpha>0$, 使得对所有充分大的 n, $G(n,\alpha\ln n/n)$ 是连通图的概率不低于 $1-1/n$.
   提示: $G(n,p)$ 可以如此采样: 先从二项分布 $\mathrm{Binom}(\binom{n}{2},p)$ 中采样 m, 再从 $G(n,m)$ 中采样. $G(n,m)$ 可以如此采样: 从没有边的图开始, 每次随机添加一条新边, 重复 m 次.

2. (8 分) 用 $G(2n,p,q)$ 表示如下的随机图的分布: 点集为 $V=\{1,2,\ldots,2n\}$. 选取随机的 $S^*\subseteq V$ 且 $|S^*|=n$. 这样点集被划分为了两个大小相同的块 S 和 $V\setminus S$. 对于任意两个点 (u,v), 如果 u,v 在同一个块中（$u,v\in S^*$ 或者 $u,v\notin S^*$）, 那么 u,v 之间以概率 p 有边相连; 如果 u,v 在不同的块中, 那么 u,v 之间以概率 q 有边相连.

   考虑高度稀疏的场景. 令 $p=\alpha/n$, $q=\beta/n$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 是常数. 请问是否可以依据图本身的信息对 S^* 进行一个非平凡的估计. 具体来说, 是否存在一个算法 $\mathcal{M}$ 和常数 $c>0$ 使得
   $$\Pr\left[|\hat{S}|=n\wedge\frac{|\hat{S}\cap S^*|}{n}\notin(1/2-c,1/2+c)\middle|\begin{matrix}G\leftarrow G(2n,\alpha/n,\beta/n)\\ \hat{S}\leftarrow\mathcal{M}(G)\end{matrix}\right]=1-O(1/n).$$
   答案显然依赖于 (α,β) 的取值. 请找到一个尽量大的 (α,β) 的范围使得可以对 S^* 进行上述的非平凡估计.

   提示: 当 $(\alpha-\beta)^2<\alpha+\beta$ 时, 不存在任何算法可以非平凡地估计 S^* [Mossel-Neeman-Sly 2012].

3. (8 分) 有若干集合 $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$, 满足 $\forall i,j\ \ A_i\cap B_j=\varnothing\iff i=j$. 证明
   $$\sum_i\frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}}\le 1.$$

4. (8 分) 如果集合 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 满足
   $$\forall\text{distinct }a,b,c\in S,\ \Delta(a,b)+\Delta(b,c)>\Delta(a,c),$$
   我们称 S 是不共线的. 这里 Δ 表示汉明距离（Hamming distance）.
   (1) 证明, 对所有足够大的 n, 存在不共线的 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 满足 $|S|\ge 1.01^n$.
   (2) 证明, 对所有足够大的 n, 任何不共线的 $S\subseteq\{0,1\}^n$ 都满足 $|S|\le 1.99^n$.

5. (5 分) 假设 n 足够大. 证明存在不依赖 n 的常数 $\alpha>0$, 使得

   > 采样有 αn 条边的随机图 $G\sim G(n,\alpha n)$, 并采样两个不同的随机点 u,v. 那么 u,v 在 G 上联通的概率不超过 $1/n$.