

计数, 生成函数, Burnside & Pólya

请在 11 月 20 日课前提交纸质作业.

1. (10 分) 令 t_n 表示 n 个带标号的点组成的有根树的个数. 不妨令 $t_0 = 0$. 其初始几项为

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 9, \quad t_4 = 64, \dots$$

- (1) 求出 t_n 的通项公式.

提示:

- (2) 考虑 t_n 的 EGF $\tilde{T}(x) = \sum_i \frac{1}{n!} t_n x^n$. $\tilde{T}(x)$ 是一个简洁的方程的解, 请找到这个 (超越) 方程.

2. (5 分) 设 G 是点集 $V = [n]$ 上的一个简单无向图. 图中的点形成了 k 个联通子块 $S_1, \dots, S_k \subseteq V$. 向 G 添加 $k - 1$ 条边, 使得图联通. 问有多少种不同的添加边的方法.

提示: 如果每个联通子块都是单点集, 那么题目就是在问有标号的 k 个点组成的无根树的个数.

3. (5 分) 用 $C \geq 6$ 种颜色对立方体进行面染色, 要求相邻面的颜色不能相同. 求有多少种不同的染色方案. 两个染色方案等价, 当且仅当其中一种方案可以经过旋转 (不包括镜像) 转化为另一种方案.

4. (10 分) 令 $\mathbb{F}$ 是一个有限域. 考虑对域中的每个数用 C 种颜色之一染色. 每个染色方案可以表示为一个映射 $f: \mathbb{F} \rightarrow C$. (这里 $C := \{0, 1, \dots, C - 1\}$.) 考虑在仿射变换下仍然不同的染色方法数. 严格来说, 我们说两个染色方案 f, f' 是等价的, 当且仅当存在一个 $\mathbb{F}$ 上的可逆仿射映射 $g: x \mapsto ax + b$ (这里 $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{F}$), 使得 $f' = f \circ g$.

当 $|\mathbb{F}| = 7^5 = 16807 = 2 \times 3 \times 2801 + 1$, 请计算在仿射变换下仍然不同的染色方法数?

提示: 不妨先考虑一般的有限域 $|\mathbb{F}| = p^k$. 对任何有限域 $\mathbb{F}$, 其乘法群 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ 是循环群.

5. (10 分) 考虑 n 个无差异点构成的圈, 每个点上可以标记 $C := \{0, 1, \dots, C - 1\}$ 中的一个整数, 经过旋转 (不包括镜面) 可重合的标号方式视为同一种. 选以下问题中的 2 个作答即可.

- (1) 如果要求相邻两个点的奇偶性不同, 有多少种不同的标号方案? ($n = 30, C = 3$)
- (2) 如果要求所有点标的和为偶数, 有多少种不同的标号方案? ($C = 3, n = p^2$ 为奇素数平方)
- (3) 如果要求相邻两个点的标号不同, 有多少种不同的标号方案? ($n = 30$)
- (4) 如果要求所有点的标号和为 $C - 1$ 的倍数, 有多少种不同的标号方案? (n 为素数)