生成函数

吕秋实

2023.11.16

不会涉及到的内容

- 多项式乘法
- 多项式求逆
- 多项式开根
- 多项式除法
- 多项式求 ln
- 多项式求 exp
- 均可在 O(nlogn) 的时间复杂度内求出。

生成函数

- 生成函数是对于一个数列构造的形式幂级数。
- 对于一个数列 $\{a_n\}$，它对应的生成函数为 $G(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$。
- 一般会求出序列的生成函数，然后再对生成函数进行运算，最后还原成所求的序列。

一些序列的生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$

一些序列的生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ $\qquad \sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1)$
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $\qquad \sum_{i=0}^{+\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x}, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots$ $\qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$

生成函数的性质

- 这里假设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 对应的生成函数分别为 $A(x), B(x), C(x)$。
- 1. 若 $b_n = ka_n$，则 $B(x) = kA(x)$。k 为任意常数。
- 2. 若 $c_n = a_n + b_n$，则 $C(x) = A(x) + B(x)$。
- 3. 若 $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$，则 $C(x) = A(x)B(x)$。
- 4. 若 $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$，则 $B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$。
- 5. 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 6. 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- 由于生成函数是对于一个数列构造的形式幂级数，所以我们可以通过生成函数还原原来的序列。
- 设当前生成函数为 $f(x)$，对应的数列为 $\{a_n\}$，我们可以通过它 x^n 的系数得到 a_n，记作 $[x^n]f(x)$。

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- 由于生成函数是对于一个数列构造的形式幂级数，所以我们可以通过生成函数还原原来的序列。
- 设当前生成函数为 $f(x)$，对应的数列为 $\{a_n\}$，我们可以通过它 x^n 的系数得到 a_n，记作 $[x^n]f(x)$。
- 例如：$[x^4]\frac{1}{1-x} = 1, [x^6]\frac{1}{1-2x} = 2^6 = 64$
- 我们不难得到：$[x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$。

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- 由于生成函数是对于一个数列构造的形式幂级数，所以我们可以通过生成函数还原原来的序列。
- 设当前生成函数为 $f(x)$，对应的数列为 $\{a_n\}$，我们可以通过它 x^n 的系数得到 a_n，记作 $[x^n]f(x)$。
- 例如：$[x^4]\frac{1}{1-x} = 1, [x^6]\frac{1}{1-2x} = 2^6 = 64$
- 我们不难得到：$[x^n]\frac{1}{1-ax} = a^n$。
- 那 $[x^n]\frac{1}{1-3x+2x^2}$ 呢？

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- $\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$
- 其中，A, B 为常数且满足 $A(1-2x) + B(1-x) = 1$，可以解出 $A = -1, B = 2$。
- 故 $[x^n]\frac{1}{1-3x+2x^2} = [x^n](\frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x}) = -1 + 2^{n+1}$。

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- 再看一个例子：$[x^n]\frac{1}{(1-x)^k}$？

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- $[x^n]\frac{1}{(1-x)^k} = [x^n](1+x+x^2+x^3+\dots)^k$

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- $[x^n]\frac{1}{(1-x)^k} = [x^n](1+x+x^2+x^3+\ldots)^k$
- 它的组合意义为选 k 个非负整数 $a_1, a_2 \ldots a_k$，使得 $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$ 的方案数
- 由插板法得，该方案数为 $\binom{n+k-1}{k-1}$。故 $[x^n]\frac{1}{(1-x)^k} = \binom{n+k-1}{k-1}$

从封闭的幂级数形式还原原来的序列

- 易得 $[x^n]\frac{1}{(1-ax)^k} = a^n\binom{n+k-1}{k-1}$
- 故根据代数基本定理，对于任意复数域上的多项式 $P(x), Q(x)$，均可将 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 写成 $R(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i(x)}{(1+a_ix)^{b_i}}$，故可根据之前的方法还原出原序列。

小练习

- 求多重集 $\{1,1,1,1,2,3,3,3\}$ 中不同的 4 元多重子集的个数。

小练习

- 求多重集 $\{1,1,1,1,2,3,3,3\}$ 中不同的 4 元多重子集的个数。
- 考虑每种数选了多少个，可以得到答案为 $[x^4](1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)(1+x+x^2+x^3)=8$。

小练习

- 有一个果篮，里面一共有苹果、香蕉、橙子、梨四种水果，总共有 n 个，其中苹果的数量是偶数，香蕉的数量不超过 4 个，橙子的数量是 5 的倍数，梨的数量不超过 1 个。求果篮里各种水果的数目的方案数。

小练习

- 有一个果篮，里面一共有苹果、香蕉、橙子、梨四种水果，总共有 n 个，其中苹果的数量是偶数，香蕉的数量不超过 4 个，橙子的数量是 5 的倍数，梨的数量不超过 1 个。求果篮里各种水果的数目的方案数。
- 答案即为 $[x^n](1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x) = [x^n]\frac{(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x)}{(1-x^2)(1-x^5)} = [x^n]\frac{1}{(1-x)^2} = n+1$

斐波那契数列通项公式

- 斐波那契数列的定义为：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$
- $f_0 = f_1 = 1$。
- 设 $\{f_n\}$ 的生成函数为 $F(x)$，即 $F(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i$

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + x + \sum_{i=2}^{+\infty} f_i x^i \\
&= 1 + x + \sum_{i=2}^{+\infty} (f_{i-1} + f_{i-2}) x^i \\
&= 1 + x + x \sum_{i=1}^{+\infty} f_i x^i + x^2 \sum_{i=0}^{+\infty} f_i x^i \\
&= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x)
\end{aligned}$$

斐波那契数列通项公式

- 整理得：$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
- 设 $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 则 $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\frac{\phi_1}{\sqrt{5}}}{1-\phi_1 x} + \frac{-\frac{\phi_2}{\sqrt{5}}}{1-\phi_2 x}$
- 故 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^{n+1} - \phi_2^{n+1})$

运用导数和积分求生成函数

- 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ 的生成函数?

运用导数和积分求生成函数

- 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ 的生成函数?
- $f(x) = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$

运用导数和积分求生成函数

- 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ 的生成函数?
- $f(x) = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$
- $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ 的生成函数?

运用导数和积分求生成函数

- 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ 的生成函数?
- $f(x) = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$
- $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ 的生成函数?
- 可以将 n^2 拆成 $n(n-1)+n$，于是
  $f(x) = x^2(\frac{1}{1-x})'' + x(\frac{1}{1-x})' = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$。

运用导数和积分求生成函数

- 若 $b_n = na_n$，则 $B(x) = xA'(x)$。
- 若 $b_n = \frac{a_n}{n+1}$，则 $B(x) = \frac{\int A(x)dx}{x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ 的生成函数?
- $f(x) = x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2}$
- $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ 的生成函数?
- 可以将 n^2 拆成 $n(n-1) + n$，于是 $f(x) = x^2(\frac{1}{1-x})'' + x(\frac{1}{1-x})' = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$。
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$ 的生成函数?
- $f(x) = \frac{\int \frac{1}{1-x}dx}{x} = -\frac{ln(1-x)}{x}$

平方和公式

- 求 $\sum_{j=1}^{n} j^2$。
- 之前我们已经求出了 $\{n^2\}$ 的生成函数为 $f(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$
- 于是
  $\sum_{j=1}^{n} j^2 = [x^n]\frac{f(x)}{1-x} = [x^n]\frac{x^2+x}{(1-x)^4} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

Catalan 数

- 求 n 对括号能够组成的合法括号序列的个数。
- 例如：$n=3$ 时，合法的括号序列有 $((())),(()()),(())(),()(()),()()()$，故答案为 5。

Catalan 数

- 求 n 对括号能够组成的合法括号序列的个数。
- 例如：$n = 3$ 时，合法的括号序列有 $((())), (()()), (())(), ()(()), ()()()$，故答案为 5。
- 求将 $n + 2$ 边形划分成若干三角形的方案数。

Catalan 数

- 求 n 对括号能够组成的合法括号序列的个数。
- 例如：$n=3$ 时，合法的括号序列有 $((())),(()()),(())(),()(()),()()()$，故答案为 5。
- 求将 $n+2$ 边形划分成若干三角形的方案数。
- 它们都有相同的递推公式：$c_n=\sum_{i=0}^{n-1}c_ic_{n-i-1}$，其中 $c_0=1$。
- 称这个数列为 Catalan 数。

运用生成函数求 Catalan 数的通项公式

- 设 $C(x)$ 为 Catalan 数的生成函数，根据递推公式，有 $c_n x^n = x\sum_{i=0}^{n-1}(c_i x^i)(c_{n-i-1}x^{n-i-1}), \forall n \geq 1$
- 故 $C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(c_i x^i)(c_j x^j) = 1 + xC^2(x)$
- 故 $xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$, 解得 $C(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$
- 取 $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$(为什么?)。

运用生成函数求 Catalan 数的通项公式

- 根据广义二项式定理:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= (1-4x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i \\
&= 1 - 2x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdots -\frac{2i-3}{2}}{i!} (-4)^i x^i \\
&= 1 - 2x - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2i-3)!! * 2^i}{i!} x^i \\
&= 1 - 2x - 2\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(2i-2)!}{i!(i-1)!} x^i
\end{aligned}
$$

- 故 $C(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i+1)!i!} x^i$, 故可得 Catalan 数的通项公式为 $c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

指数生成函数

- 对于一个序列 $\{a_n\}$，定义它的指数生成函数 (EGF) 为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$。
- 对于一个指数生成函数，将它还原到原数列可以将每项系数乘以 $n!$，记作 $a_n = [\frac{x^n}{n!}]f(x)$。
- 之前讲的生成函数称作普通生成函数 (OGF)。

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$。

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ 的指数生成函数?

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x$。

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x$。
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ 的指数生成函数?

一些数列的指数生成函数

- $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$。
- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$。
- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x$。
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ 的指数生成函数?
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$。

自然数幂和

- 固定 n，设 $a_k = \sum_{i=0}^{n-1} i^k$，求 $\{a_k\}$ 的 EGF。

自然数幂和

- 固定 n，设 $a_k=\sum_{i=0}^{n-1} i^k$，求 $\{a_k\}$ 的 EGF。
- $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} e^{ix} \\ &= \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} \end{aligned}$$

EGF 的乘法

- 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 的 EGF 分别为 $A(x), B(x), C(x)$。
- 若 $C(x) = A(x)B(x)$，则 $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$。
- 这个可以理解为：n 个有标号的物体，在其中选 k 个放入 A 集合中，剩下的放入 B 集合中，每个集合内部还有一个方案数。
- 注意它跟 OGF 相乘的区别。

小练习

- 由 $1,2,3,4$ 组成的五位数中，要求 1 出现不超过 2 次，但不能不出现，2 出现不超过 1 次，3 出现可达 3 次，4 出现偶数次。求这样的五位数个数。

小练习

- 由 $1, 2, 3, 4$ 组成的五位数中，要求 1 出现不超过 2 次，但不能不出现，2 出现不超过 1 次，3 出现可达 3 次，4 出现偶数次。求这样的五位数个数。
- 答案即为 $[\frac{x^5}{5!}](x + \frac{x^2}{2!})(1 + x)(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) = 215$。

另一种理解方式

- 将 n 个有标号的物体分成大小分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 个有标号的类 (满足 $\sum_{i=1}^{m} x_i = n$) 的方案数为 $\binom{n}{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_n!}$
- 所以可以先将 $x_i!$ 除到每个项中，最后再将 $n!$ 乘回来即可。

exp

- 只由一个环组成的排列个数的 EGF:
  $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -ln(1-x)$。
- 所有排列个数的 EGF: $G(x) = \frac{1}{1-x}$。
- 可以发现 $G(x) = exp(F(x))$，有没有其它解释?

exp

- 只由一个环组成的排列个数的 EGF: $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -ln(1-x)$。
- 所有排列个数的 EGF: $G(x) = \frac{1}{1-x}$。
- 可以发现 $G(x) = exp(F(x))$，有没有其它解释?
- 考虑每个排列都是由一些环组成的，于是考虑枚举环的个数，假设环的个数为 k，那么贡献的方案数即为 $\frac{F^k(x)}{k!}$。
- 故 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k(x)}{k!} = exp(F(x))$。

- 只由一个环组成的排列个数的 EGF: $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -ln(1-x)$。
- 所有排列个数的 EGF: $G(x) = \frac{1}{1-x}$。
- 可以发现 $G(x) = exp(F(x))$，有没有其它解释?
- 考虑每个排列都是由一些环组成的，于是考虑枚举环的个数，假设环的个数为 k，那么贡献的方案数即为 $\frac{F^k(x)}{k!}$。
- 故 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k(x)}{k!} = exp(F(x))$。
- 求仅由大小为 $2, 3, 4$ 的环组成的大小为 8 的排列的个数?
- $[\frac{x^8}{8!}]exp(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}) = [\frac{x^8}{8!}]exp(\frac{x^2}{2})exp(\frac{x^3}{3})exp(\frac{x^4}{4}) = [\frac{x^8}{8!}](1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384})(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18})(1 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{32}) = 3745$

Thank you for Listening!