Pólya 计数

王颖 李翰禹

北京大学前沿计算研究中心

2023 年 11 月 21 日

问题描述

- 正方形顶点的二染色（红色/蓝色），有多少种本质不同的染色方案？
- 如果要求顶点两红两蓝，有多少种方案？
- 一般性地，对具有某种对称性的物体染色，问非等价的染色方案数.

刻画对称性

- 先不考虑对称性，记 $X = \{x \mid D \to C\}$ 为所有染色方案的集合.
  - e.g. 四边形顶点二染色，$|X| = 2^4$.
- 考虑 D 上的变换群 G.
  - 变换：如何操作这个物体？e.g. 旋转、反射.
  - G 满足封闭性、结合律，存在单位元（恒等变换）、逆元.
- 置换 $g : D \to D$ 诱导出 X 上的置换，从而描述染色方案的对称性.

群作用

- $\forall g \in G, x \in X$ 定义 $g * x : D \to C$ 为

$$g * x(d) = x(g^{-1}(d)) \ \forall d \in D.$$

- 称映射 $\phi : G \times X \to X$ 为 G 在 X 上的一个群作用，如果 ϕ 满足
  - $\phi(1, x) = x$,
  - $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$.
- 易验证 $\phi(g, x) = g * x$ 是 G 在 X 上的群作用.

对称等价类

- 定义对称: 任意 $x, y \in X$, 若存在 $g \in G$ 使得 $x = g * y$, 则说染色方案 x, y 是对称的.
- 对称是一种等价关系，满足
  - 自反性,
  - 对称性,
  - 传递性.
- 称 $O_x = \{x \mid g * x, \forall g \in G\}$ 为 x 的轨道.
- 求解目标: 等价类的数目/轨道个数

$$|\{O_x \mid x \in X\}|$$

目录

Burnside 引理

- Burnside 引理:

$$\text{轨道个数} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix_X(g)|.$$

- $Fix_X(g)$: g 作用下的不动点.

$$Fix_X(g) = \{x \in X \mid g * x = x\}$$

证明

- 思路：计数 $\{(g, x) \mid g \in G, x \in X, g * x = x\}$.
  - 按照 $g \in G$ 计数，$\sum_{g\in G} |Fix_X(g)|$.
  - 按照 $x \in X$ 计数，
    - 对 X 中的元素 x 定义稳定化子：$S_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$.
    - $\sum_{g\in G} |Fix_X(g)| = \sum_{x\in X} |S_x|$.
    - 只要证

$$\sum_{x\in S} \frac{|S_x|}{|G|} = \sum_{x\in X} \frac{1}{|O_x|}.$$

轨道–稳定子定理

- 有限群 G 作用在集合 X 上，那么 $\forall x \in X, |O_x||S_x| = |G|$.
- 证明：
  - x 的稳定化子 $S_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$ 是 G 的子群.
  - 按照 $g(x)$ 的值将 G 划分成若干个等价类 $A_1, A_2, \cdots, A_m$. 那么,
  - $m = |O_x|$.
  - $\forall 1 \le i \le m$, $|A_i| = |S_x|$.
    - 固定 $g_i \in A_i$.
    - $h \in A_i \iff g_i * x = h * x \iff g_i^{-1} * h * x = x \iff g_i^{-1} * h \in S_x$ $\iff h \in g_i * S_x$ 其中 $g_i * S_x = \{g_i * g \mid g \in S_x\}$.
    - $|A_i| = |g * S_x| = |S_x|$.

例子

- 正方形顶点的 p 染色，允许旋转和反射，问非等价的染色方案数.
- 变换群：D_8，一个恒等变换，三个旋转，四个反射.
  - 恒等变换不动点：所有染色法，有 p^4 种.
  - 90° 旋转不动点：四个顶点同色，有 p 种.
  - 180° 旋转不动点：对顶点同色，有 p^2 种.
  - 沿边反射不动点：邻边顶点同色，有 p^2 种.
  - 沿对角线反射不动点：对顶点同色，另一对顶点随意，有 p^3 种.
- 非等价染色数：

$$\frac{1}{8}(p^4+2p+p^2+2p^2+2p^3)=\frac{1}{8}(p^4+2p^3+3p^2+2p).$$

目录

轮换分解

- 将 D 中的元素标号为 $\{1, 2, \cdots, n\}$, D 上的一个变换 g 对应一个排列 π, 可对 π 进行轮换分解.
- e.g.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(i)$	6	2	7	10	3	8	9	1	5	4

- 分解成轮换 $(1, 6, 8), (2), (3, 7, 9, 5), (4, 10)$.

二面体群的轮换分解

- 例： $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$.

二面体群的轮换分解

- 例： $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$.
- r 是顺时针转 90°， s 是关于 $1-2$ 边中垂线的反射.

二面体群的轮换分解

- 例： $D_8 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$.
- r 是顺时针转 $90°$， s 是关于 $1-2$ 边中垂线的反射.
- $e = (1)(2)(3)(4)$.
- $r = (1\ 2\ 3\ 4)$， $r^2 = (1\ 3)(2\ 4)$， $r^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$.
- $s = (1\ 2)(3\ 4)$.
- $rs = (1\ 3)(2)(4)$， $r^2s = (1\ 4)(2\ 3)$， $r^3s = (2\ 4)(1)(3)$.

目录

不动点集计算

- 考虑正方形顶点染色（p 种颜色）.
- 对变换 $s = (1\ 2)(3\ 4)$，如何确定它的不变染色方案数 $|Fix_X(s)|$？
- 如果 $s * x = x$，那么 x 一定要把 1 和 2 染成同一种颜色，也要把 3 和 4 染成同一种颜色.
- 因此，对 1 和 2，我们可以选择 p 种颜色，对 3 和 4，也可以选择 p 种颜色.
- 总共有 p^2 种不变的染色方案数.

不动点集计算

- 更一般地，考虑集合 D 的 p 染色.
- 置换 $\sigma \in S_D$.
- σ 可以分解成轮换乘积，设它是 $c(\sigma)$ 个轮换的乘积.
- 对 σ 不变的染色方案数有 $k^{c(\sigma)}$ 个.
- 运用 Burnside 引理，可以得到非等价染色方案数.

Pólya 定理（弱化版本）

- 轮换长度为 k 时我们叫该轮换为 k-圈.
- 如果 σ 有 e_1 个 1-圈，$\cdots$，e_n 个 n-圈，称 σ 的型为

$$(e_1, \ldots, e_n).$$

- $e_1 + \cdots + e_n = c(\sigma)$.
- 对 σ 不变的染色方案数只依赖于 σ 的型.
- 为此，引入 σ 的单项式来表示 σ 的型：

$$\mathrm{mon}(\sigma) = z_1^{e_1} \ldots z_n^{e_n}.$$

Pólya 定理（弱化版本）

- 当 $z_1 = \cdots = z_n = p$ 时，$\mathrm{mon}(\sigma) = |Fix_X(\sigma)|$.
- 定义群 G 的轮换指数为

$$P_G(z_1, \ldots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{mon}(g).$$

这是一个关于 $z_1, \ldots, z_n$ 的多元多项式.

- 于是，D 的非等价 p 染色数为 $P_G(p, \ldots, p)$.
- 为什么需要轮换指数？

特定颜色出现次数限制

- 正方形顶点的二染色，如果要求顶点两红两蓝，有多少种本质不同的染色方案？
  - 如果要求红色出现 m 次，有多少种本质不同的染色方案？
  - 关心那些满足颜色出现次数限制的染色方案数.
- 假设红色的 k-圈有 t_k 个，那么必须要有 $0 \le t_k \le e_k$ 且

$$p = t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot 2 + \cdots + t_n \cdot n.$$

- 对每一组解，我们还需要决定是哪几个 k-圈染成红色，因此还需要在解数上乘一个

$$\binom{e_1}{t_1} \cdots \binom{e_n}{t_n}.$$

固定数目染色

- 设 r 和 b 分别代表红色和蓝色.
- 考虑如下多项式:

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\dots(r^n+b^n)^{e_n}.$$

- $p = t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot 2 + \cdots + t_n \cdot n$ 的解数可以用 $r^p b^q$ 的系数来表示.
- $$P_G(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{mon}(g).$$

$$\mathrm{mon}(\sigma) = (r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\dots(r^n+b^n)^{e_n}.$$

Pólya 定理（一般版本）

- 根据 Burnside 引理，有 x 个红色，y 个蓝色的非等价染色数等于

$$P_G(r+b,\ldots,r^n+b^n)$$

中 $r^x b^y$ 的系数.

- 一般地，将 X 用 m_1 个 c_1 颜色，m_2 个 c_2 颜色$\cdots$，m_p 个 c_p 染色，非等价的染色方案数是

$$P_G(u_1+\cdots+u_p,\ldots,u_1^n+\cdots+u_p^n)$$

中 $u_1^{m_1}\ldots u_p^{m_p}$ 的系数.

Pólya 定理（一般版本）

- 取 $u_i = 1$，轮换指数变为 $P_G(p, \ldots, p)$，恰好是染色数目任意时候的非等价方案数.
- 弱化版本的 Pólya 定理是一般版本的特例.

例题

- 考虑正方形顶点的二染色，要求两红两蓝，问非等价方案数.
- 轮换指数为：

$$P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{8}(z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4).$$

- 将 $r^k + b^k$ 代入 z_k：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}((r+b)^4 + 2(r+b)^2(r^2+b^2) + 3(r^2+b^2)^2 + 2(r^4+b^4))\\ =&b^4 + b^3 r + 2b^2 r^2 + br^3 + r^4.\end{aligned}$$

- 因此两红两蓝有 2 种.

练习

- 用 n 种颜色给立方体进行点染色/边染色/面染色，问非等价方案数.
- 如果要求红色出现 m 次？

目录

一卤代烃的同分异构体

- n 元一卤代烃的分子式为 $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+1}\mathrm{X}$，$\mathrm{X}=\mathrm{F}, \mathrm{Cl}, \mathrm{Br}, \mathrm{I}$.
- 每个碳原子（C）有四个键（恰好连四个其他原子）.
- 氢原子（H）和卤原子（X）有一个键（恰好连一个其他原子）.
- 不考虑立体异构，n 元一卤代烃有多少个同分异构体?

一卤代烃的同分异构体

- 将连接卤原子的碳原子看成根，问题变成：n 个节点非同构有根树的数目，其中根节点度数至多为 3，其他节点度数至多为 4.
- 如何计算？

一卤代烃的同分异构体

- 设 R_k 是 k 元一卤代烷的同分异构体数目，$R_0 = 1$，令

$$r(x) = R_0 + R_1 x + \cdots + R_k x^k + \ldots$$

- 有根树的子树也是有根树，因而根结点的三个子树也可以看成一卤代烷，而这些子树是不可区分的，所以这里的对称群结构是 S_3.
- 轮换指数

$$P_G(z_1, \ldots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{mon}(g) = (z_1^3 + 3z_1 z_2 + 2z_3)/6.$$

一卤代烃的同分异构体

- 每个子树位置的“染色数”是 $r(x)$.
- 所以

$$r(x) = 1 + x \cdot \frac{r(x)^3 + 3r(x)r(x^2) + 2r(x^3)}{6}.$$